微積分学続論 II 演習 1

演習 1.1. $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ は共に連続であるとする。このとき、微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x + g(t)$$
$$x(0) = x_0$$

の解 $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ は $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$ とおくとき、

$$x(t) = e^{F(t)}x_0 + \int_0^t e^{F(t)-F(s)}g(s)ds$$

であることを示せ。

演習 1.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とする。
(1) A の固有値を求めよ。また、$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ。
(2) $[0, \infty)$ 上で微分可能な関数 $x_1(t), x_2(t)$ が任意の $t > 0$ で

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

および $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をみたす。このとき $x_1(t), x_2(t)$ を求めよ。
ヒント：$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ とおき、$y_1(t), y_2(t)$ を求める。

演習 1.3. $C([0,1]) = \{f | f : [0,1] \to \mathbb{R}, f$ は $[0,1]$ 上連続 $\}$ とするこのとき、$f \in C([0,1])$ に対して、

$$|f|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$
$$|f|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

とおくとき、$|\cdot|_1, |\cdot|_\infty$ は共に $C([0,1])$ のノルムで有ることを示せ。

演習 1.4. 2 行 2 列の実行列の全体を $M_2(\mathbb{R})$ とおく。$A \in M_2(\mathbb{R})$ に対して、

$$|A| = \sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0} \frac{|Ax|_2}{|x|_2}$$

とおくと、$|\cdot|$ は $M_2(\mathbb{R})$ のノルムであることを示せ。さらに、$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して、

$$|A| \leq \sqrt{|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2}$$

が成り立つことを示せ。
ヒント：$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ を用いる。

演習 1.5. この問題は難しいかもしれませんが、挑戦してみてください。試験には出ません。
$p \geq 1$ とし、$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して、

$$|x|_p = \big(|x_1|^p + |x_2|^p\big)^{1/p}$$

と定義する。$|\cdot|_p$ は $\mathbb{R}^2$ のノルムであることを示せ。

解答

1.1

与えられた微分方程式に $e^{-F(t)}$ を掛けると、

$$e^{-F(t)}\frac{dx}{dt} - f(t)e^{-F(t)}x(t) = e^{-F(t)}g(t)$$
$$\frac{d}{dt}\bigl(e^{-F(t)}x(t)\bigr) = e^{-F(t)}g(t)$$

0 から t まで積分すれば、

$$e^{-F(t)}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-F(s)}g(s)ds$$

あとは $e^{F(t)}$ を掛ければよい。

1.2

(1) 固有値は $3, -2$. 固有値 3 に属する固有ベクトルの一つは $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, 固有値 -2 に属する固有ベクトルの一つは $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. 従って

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}$$

とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$ とおくと、

$$\begin{pmatrix}\frac{dy_1}{dt}\\\frac{dy_2}{dt}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \tag{2}$$

従って $y_1(t) = e^{3t}y_1(0), y_2(t) = e^{-2t}y_2(0)$. いま、$y_1(0) = \frac{3}{\sqrt{5}}, y_2(0) = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ なので、

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}6e^{3t} - e^{-2t}\\3e^{3t} + 2e^{-2t}\end{pmatrix}.$$

1.3
$|\cdot|_1$ について：$|f|_1 \geq 0$ は明らか。$f=0$ つまり任意の $x \in [0,1]$ で $f(x)=0$ のとき $\int_0^1 |f(x)|dx = 0$ より $|f|_1 = 0$. 逆に $|f|_1 = 0$ のとき $\int_0^1 |f(x)|dx = 0$. いまある $x_* \in [0,1]$ で $|f(x_*)| > 0$ とするとき、f は連続なのである $\delta > 0$ があって、任意の $x \in [x_* - \delta, x_* + \delta]$ に対して $|f(x)| \geq |f(x_*)|/2$ が成り立つ。このとき、

$$|f|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \geq \int_{x_*-\delta}^{x_*+\delta} \frac{|f(x_*)|}{2} dx = |f(x_*)|\delta > 0$$

次に $\lambda \in \mathbb{R}$ のとき、

$$|\lambda f|_1 = \int_0^1 |\lambda f(x)|dx = |\lambda| \int_0^1 |f(x)|dx = |\lambda||f|_1.$$

また、$f, g \in C([0,1])$ に対して、

$$\begin{aligned} |f+g|_1 = \int_0^1 |f(x)+g(x)|dx &\leq \int_0^1 (|f(x)| + |g(x)|)dx \\ &= \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx = |f|_1 + |g|_1 \end{aligned}$$

以上より、$|\cdot|_1$ はノルム。
$|\cdot|_\infty$ について：$|f|_\infty \geq 0$ は明らか。$f = 0$ なら $|f|_1 = 0$ も明らか。$|f|_1 = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0$ とする。このとき任意の $x \in [0,1]$ で $f(x) = 0$ より $f = 0$. 次に、$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、

$$|\lambda f|_1 = \max_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \max_{x\in[0,1]} |f(x)| = |\lambda||f|_1.$$

さらに $f, g \in C([0,1])$ に対して

$$\begin{aligned} |f+g|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)| &\leq \max_{x\in[0,1]} (|f(x)| + |g(x)|) \\ &\leq \max_{x\in[0,1]} |f(x)| + \max_{x\in[0,1]} |g(x)| = |f|_\infty + |g|_\infty. \end{aligned}$$

以上より $|\cdot|_\infty$ もノルム。

1.4 $|A| \geq 0$, $A = 0$（A が零行列） なら $|A| = 0$ は明らか。$|A| = 0$ とする。このとき、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $Ax = 0$ である。とくに、$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと $Ae_1 = Ae_2 = 0$ より $A = 0$. 次に、$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $|\lambda Ax|_2 = |\lambda||Ax|_2$ より $|\lambda A| = |\lambda||A|$. さらに $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ のとき、

$$\begin{aligned} |A+B| &= \sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0} \frac{|(A+B)x|_2}{|x|_2} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0} \frac{|Ax|_2 + |Bx|_2}{|x|_2} \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0} \frac{|Ax|_2}{|x|_2} + \sup_{x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0} \frac{|Bx|_2}{|x|_2} = |A| + |B|. \end{aligned}$$

以上より、$|\cdot|$ は $M_2(\mathbb{R})$ のノルムである。
($M_2(R) = L(\mathbb{R}^2)$ で有るから、$|A| = |A|_{L(\mathbb{R}^2)}$ となり、講義でやったことからも $|\cdot|$ がノルムで有ることがわかる。)
ここで、$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$、$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\begin{aligned} |Au|_2 &= \sqrt{(a_{11}x + a_{12}y)^2 + (a_{21}x + a_{22}y)^2} \\ &\leq \sqrt{(|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2)(x^2 + y^2) + (|a_{21}|^2 + |a_{22}|^2)(x^2 + y^2)} \\ &= \sqrt{|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2}\sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2}|u|_2 \end{aligned}$$

従って、$|A| \leq \sqrt{|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2}$.