微積分学続論 II 演習 2

演習 1. A を 3×3-行列とし、次の微分方程式を考える。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

この微分方程式の解を、次の (1), (2) 場合について求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

演習 2.

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2$$
$$x(0) = 0$$

を満たす $(-\delta, \delta)$ 上定義された微分可能な関数 $x(t)$ について、$x(t)$ および δ の最大値を求めよ。

演習 3. $\lambda \geq 0$ とする。$\mathbb{R}$ 上定義された関数 $x(t)$ が任意の $t \in \mathbb{R}$ で

$$\frac{d^2}{dt^2}x = -\lambda x$$

をみたし、さらに $x(0) = 0, x'(0) = 1$ をみたすとする。

(1) $y(t) = x'(t)$ とおくと、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

をみたすことを示せ。

(2) $x(t)$ を求めよ。

解答

1 (1)

$$|A-\lambda I| = -\lambda(\lambda-1)^2$$

より固有値は $\lambda = 0, 1$.

固有値 0 に属する固有ベクトルは $t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

固有値 1 に属する固有ベクトルは $t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$. よって、固有値 1 の固有空間の次元は 1 である。いま

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\-2 & 1 & -1\\-2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

ここで、$e_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, e_1 = (A-I)e_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ とおく。$(A-I)^2e_2 = 0$ より、

$$Ae_1 = e_1, Ae_2 = e_1 + e_2.$$

さらに $e_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ とおくと $Ae_3 = 0$.

従って $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix} = y_1(t)e_1 + y_2(t)e_2 + y_3(t)e_3$ とおくと、

$$B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ に対して } \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{pmatrix}$$

となる。従って、

$$\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{pmatrix} = e^{tB}\begin{pmatrix}y_1(0)\\y_2(0)\\y_3(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^t & te^t & 0\\0 & e^t & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(0)\\y_2(0)\\y_3(0)\end{pmatrix}$$

いま、$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = -e_2$ より、$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

よって $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -te^t \\ -e^t \\ 0 \end{pmatrix}$. これより

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = -te^t e_1 - e^t e_2 = e^t \begin{pmatrix} 1-t \\ -2t \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3$$

より固有値は 0. 固有値 0 の固有ベクトルは $t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. 従って固有値 0 の固有空間の次元は 1. ここで、

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = Ae_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, e_1 = Ae_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくとき、

$$Ae_1 = 0, Ae_2 = e_1, Ae_3 = e_2.$$

よって $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = y_1(t)e_1 + y_2(t)e_2 + y_3(t)e_3$ とおくとき、

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ に対して } \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

よって、

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = e^{tB} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix}$$

いま、$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = 2e_3$ より、$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

よって $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ 2 \end{pmatrix}$. これより

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = t^2 e_1 + 2te_2 + 2e_3 = \begin{pmatrix} -2t^2 + 6t \\ -4t^2 + 2t \\ -4t + 2 \end{pmatrix}$$

2

$x(t)$ を $(-\delta, \delta)$ 上で微分可能な関数とする。

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2$$

をみたすなら $(-\delta, \delta)$ 上で単調増加なので置換積分により $t \in (-\delta, \delta)$ なら

$$\int_0^{x(t)} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^t \frac{1}{1+x(s)^2} \frac{dx}{ds} ds = \int_0^t ds$$

これより、$\mathrm{Tan}^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ を $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上での tan の逆関数とするとき、

$$\mathrm{Tan}^{-1} x(t) = t.$$

いま Tan^{-1} の値域は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ なので $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ である。以上より δ の最大値は $\frac{\pi}{2}$ であり、

$$x(t) = \tan t$$

3

(1) $x'(t) = y(t)$, $y'(t) = x''(t) = -\lambda x$ より明らか。

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

$$|A - tI| = t^2 + \lambda$$

より A の固有値は $\pm\sqrt{\lambda}i$.

A の固有値 $\sqrt{\lambda}i$ に属する固有ベクトルは、$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$ とおくと $\alpha(e_1 + ie_2)$ である。また固有値 $-\sqrt{\lambda}i$ に属する固有ベクトルは $\alpha(e_1 - ie_2)$ で与えられる。ここで、$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t)(e_1 + ie_2) + Y(t)(e_1 - ie_2)$ とおくとき、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda}i & 0 \\ 0 & -\sqrt{\lambda}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\lambda}t + i\sin\sqrt{\lambda}t & 0 \\ 0 & \cos\sqrt{\lambda}t - i\sin\sqrt{\lambda}t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{pmatrix}$$

$X(t)(e_1 + ie_2) + Y(t)(e_1 + ie_2) = (X(t) + Y(y))e_1 + i(X(t) - Y(t))e_1$ より $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Z(t)e_1 + W(t)e_2$ とおけば、

$$\begin{pmatrix} Z(t) \\ W(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\lambda}t & \sin\sqrt{\lambda}t \\ -\sin\sqrt{\lambda}t & \cos\sqrt{\lambda}t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z(0) \\ W(0) \end{pmatrix}$$

いま $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}e_2$ より $Z(0) = 0, W(0) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. 従って $Z(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}t, W(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}t$. 以上より、

$$x(t) = Z(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}t$$