Brouwer の不動点定理

川越 大輔

2022 年 2 月 28 日

本稿では, 次の定理を証明する.

定理 0.1 (Brouwer の不動点定理)**.** $\mathbb{R}^d$ の有界な凸閉集合 Ω から自身への連続写像 f は不動点を持つ.

まずは次の補題を証明する.

補題 0.2. g を $\mathbb{R}^d$ に値をもつ $d+1$ 変数 $(x_0,\ldots,x_d)$ の C^∞ 級関数とする. また g_{x_i}, $i=0,\ldots d$ を g の x_i 偏導関数とし, D_i を列ベクトル $g_{x_0},\ldots,g_{x_{i-1}}$, $g_{x_{i+1}},\ldots,g_{x_d}$ からなる行列の行列式, すなわち

$$D_i := \det(g_{x_0},\ldots,g_{x_{i-1}},g_{x_{i+1}},\ldots,g_{x_d})$$

とする. このとき,

$$\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\frac{\partial}{\partial x_i}D_i = 0$$

が成り立つ.

証明. 行列式の微分より,

$$\begin{aligned}
(-1)-i\frac{\partial}{\partial x_i}D_i &= \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{d}(-1)^i\det(g_{x_0},\ldots,g_{x_jx_i},\ldots,g_{x_{i-1}},g_{x_{i+1}},\ldots,g_{x_d})\\
&= \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}\det(g_{x_jx_i},g_{x_0},\ldots,g_{x_{j-1}},g_{x_{j+1}},\ldots,g_{x_{i-1}},g_{x_{i+1}},\ldots,g_{x_d})\\
&\quad+\sum_{j=i+1}^{d}(-1)^{i+j-1}\det(g_{x_jx_i}g_{x_0},\ldots,g_{x_{i-1}},g_{x_{i+1}},\ldots,g_{x_{j-1}},g_{x_{j+1}},\ldots,g_{x_d})
\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $i=0$ のときは $\sum_{j=0}^{i-1}=0$, $i=d$ のときは $\sum_{j=i+1}^{d}=0$ と解釈する. $0\leq j\leq k\leq d$ を固定し, 上式において

$$\det(g_{x_jx_k}g_{x_0},\ldots,g_{x_{j-1}},g_{x_{j+1}},\cdots g_{x_{k-1}},g_{x_{k+1}},\ldots,g_{x_d})$$

の項に注目する. この項が和 $\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\frac{\partial}{\partial x_i}D_i$ に現れるのは 2 項ある. ひとつは $(-1)^j\frac{p}{\partial x_j}D_j$ からであり, その係数は $(-1)^{j+k-1}$ である. もうひとつは $(-1)^k\frac{\partial}{\partial x_k}D_k$ からであり, その係数は $(-1)^{j+k}$ である. 符号が逆であるから, 和 $\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\frac{\partial}{\partial x_i}D_i$ においてこの形の項は残らない. この和の全ての項は上の形の項からなるから, 結局 $\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\frac{\partial}{\partial x_i}D_i=0$ である. $\square$

定理 0.1 の証明. まず, Ω が原点中心の球の場合に定理を証明すればよいことを示す. Ω は有界だから, Ω を含む十分大きな球 $B_R := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < R\}$ が取れる. また, Ω は有界凸閉集合だから, 各 $x \in \overline{B_R}$ に対して

$$|x - y| = \min_{z \in \Omega} |x - z| \tag{0.1}$$

となる $y \in \Omega$ が存在する. $x_1, x_2 \in \overline{B_R}$ に対し, 対応する y を y_1, y_2 とすると, Ω は凸であるから, 任意の $t \in [0, 1]$ に対して $y_1 + t(y_2 - y_1) \in \Omega$ である. よって, (0.1) より

$$|x_2 - (y_2 + t(y_1 - y_2))|^2 \geq |x_2 - y_2|^2, \quad |x_1 - (y_1 + t(y_2 - y_1))|^2 \geq |x_1 - y_1|^2$$

が成り立つ. これら 2 つの不等式の辺々を加えて整理すると,

$$t(x_2 - x_1, y_2 - y_1) - t|y_1 - y_2|^2 + t^2|y_2 - y_1|^2 \geq 0$$

が得られる. $t > 0$ として両辺を t で割り, $t \to 0$ とすれば,

$$|y_1 - y_2|^2 \leq (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \leq |x_1 - x_2||y_1 - y_2|,$$

すなわち $|y_1 - y_2| \leq |x_1 - x_2|$ が得られる. これにより, 任意の $x \in \overline{B_R}$ に対して, (0.1) を満たす $y \in \Omega$ が一意であることが分かる. ここで $y = g(x)$ とおくと, 先の評価から任意の $x_1, x_2 \in \overline{B_R}$ に対して $|g(x_1) - g(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ であるから, 写像 $g : \overline{B_R} \to \Omega$ は連続である.

さて, 写像 $f \circ g : \overline{B_R} \to \mathbb{R}^d$ を $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ で定義すると, この写像 $f \circ g$ は $\overline{B_R}$ を Ω $(\subset \overline{B_R})$ に写す連続写像である. よって, 定理が球の場合に成立すると仮定すれば, 写像 $f \circ g$ は $\overline{B_R}$ に不動点 x_0 をもつ. すなわち,

$$(f \circ g)(x_0) = f(g(x_0)) = x_0 \tag{0.2}$$

が成り立つことになる. f の値域は Ω であるから, $x_0 \in \Omega$ である. $x_0 \in \Omega$ に対しては $g(x_0) = x_0$ であるから, (0.2) より $f(x_0) = x_0$ が成り立つ. すなわち, x_0 は f の不動点である. 以上より, 原点中心の球に対して定理が証明されれば, 任意の有界凸閉集合でも定理が成立することが示された. このことを踏まえて, 以下では Ω が閉球 $\overline{B_R}$ の場合に定理を証明する.

次に, f が C^∞ 級関数の場合に定理が示されれば十分であることを示す. f を $\overline{B_R}$ から自身への連続関数とする. また, ρ をコンパクト台を持つ非負値 C^∞ 級関数で

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\, dx = 1$$

を満たすものとし, $\epsilon > 0$ に対して $\rho_\epsilon(x) := \epsilon^{-d}\rho(x/\epsilon)$, $x \in \mathbb{R}^d$ で関数 ρ_ϵ を定義する. このとき, 関数 ρ_ϵ についても

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\epsilon(x)\, dx = 1$$

が成立することに注意する. この関数 ρ_ϵ を用いて, 関数 f_ϵ を

$$f_\epsilon(x) := (\rho_\epsilon * f)(x) = \int_{B_R} \rho_\epsilon(x - y) f(y)\, dy$$

で定義する. 仮定より任意の $y \in \overline{B_R}$ に対して $|f(y)| \leq R$ であるから, 任意の $x \in \overline{B_R}$ に対して

$$|f_\epsilon(x)| \leq \int_{B_R} |\rho_\epsilon(x-y)f(y)|\,dy \leq R\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\epsilon(x-y)\,dy = R$$

が成り立つ. すなわち, 関数 f_ϵ は $\overline{B_R}$ から自身への C^∞ 級関数である.

もし C^∞ 級関数に対して定理が証明されたとすると, f_ϵ は $\overline{B_R}$ 内に不動点 x_ϵ を持つことになる. すなわち, $f_\epsilon(x_\epsilon) = x_\epsilon$ が成り立つ. $\overline{B_R}$ はコンパクト集合であるから, 点列 $\{x_\epsilon\}$ から収束する部分列が取れる. この部分列を再び $\{x_\epsilon\}$ と表すこととし, その極限を x とすれば, 三角不等式により

$$\begin{aligned}|f(x)-x| \leq& |f(x)-f(x_\epsilon)| + |f(x_\epsilon)-f_\epsilon(x_\epsilon)| + |f_\epsilon(x_\epsilon)-x_\epsilon| + |x_\epsilon - x| \\ \leq& |f(x)-x_\epsilon| + \max_{y\in\overline{B_R}}|f(y)-f_\epsilon(y)| + |x_\epsilon - x|\end{aligned}$$

が成り立つ. 点列 $\{x_\epsilon\}$ の取り方と f の連続性から右辺第 1 項および第 3 項は $\epsilon \downarrow 0$ で 0 に収束する. また, 関数 ρ_ϵ の性質から f_ϵ は f に $\overline{B_R}$ 上一様収束する. すなわち, 右辺第 2 項も 0 に収束する. したがって, $f(x) = x$. すなわち f は不動点を持つ. 以上より, C^∞ 級関数に対して定理が証明されれば十分であることが証明された. これを踏まえて, 以下では f が C^∞ 級関数であることを仮定する.

最後に, f が不動点を持たないと仮定して矛盾を導く. 各 $x \in \overline{B_R}$ に対して, $\lambda(x)$ を二次方程式

$$|x + \lambda(x - f(x))|^2 = R^2$$

すなわち

$$\lambda^2|x-f(x)|^2 + 2\lambda(x, x-f(x)) + |x|^2 - R^2 = 0$$

の非負根とする. 関数 f は $\overline{B_R}$ に不動点を持たないと仮定したので, 任意の $x \in \overline{B_R}$ に対して $|x - f(x)| > 0$ が成り立つことに注意すると, 二次方程式の根の公式より $\lambda(x)$ は

$$\lambda(x) = \frac{-(x, x-f(x)) + \sqrt{(x, x-f(x))^2 + (R^2 - |x|^2)|x-f(x)|^2}}{|x-f(x)|^2}$$

と表される. 明らかに関数 λ は B_R 上正値であり, ∂B_R 上で 0 となる.

ここで, 写像 $\varphi : [0,1] \times \overline{B_R} \to \overline{B_R}$ を

$$\varphi(t,x) := x + t\lambda(x)(x - f(x)) \tag{0.3}$$

で定義する. 関数 f が C^∞ 級であるから φ も C^∞ 級写像であって, 次を満たす.

1. 任意の $x \in \overline{B_R}$ に対して $\varphi(0,x) = x$.
2. 任意の $x \in \overline{B_R}$ に対して $|\varphi(1,x)| = R$.
3. 任意の $t \in (0,1)$ と任意の $x \in \partial B_R$ に対して $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) = 0$.

各 $t \in [0,1]$ に対し, 変換 (0.3) のヤコビ行列式を考える:

$$J_0(t,x) := \det\left(\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_d}\right).$$

また, $[0,1]$ 上の関数 I を

$$I(t) := \int_{B_R} J_0(t,x)\,dx$$

で定義する. 関数 φ の性質 1. により,

$$I(0) = \int_{B_R} dx = |B_R| \neq 0$$

であることが分かる. また, 性質 2. より任意の $x \in \overline{B_R}$ に対して $|\varphi(1,x)|^2 = R^2$ であるが, これを x_j で微分すると,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_d}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_d} & \cdots & \frac{\partial\varphi_d}{\partial x_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_d \end{pmatrix} = 0, \quad t = 1, x \in \overline{B_R}$$

である. $|\varphi(1,x)| = R > 0$ であるから, 上式は非自明解 $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)^T$ をもつ. ゆえに, $J_0(1,x) = 0$ である. これにより, $I(1) = 0$ も従う.

補題 0.2 で $x_0 = t$, $x_j = x_j$, $j = 1, \ldots, d$, $g = \varphi$ とおけば,

$$\frac{\partial}{\partial t} D_0(t,x) = -\sum_{j=1}^{d} (-1)^j \frac{\partial}{\partial x_j} D_j(t,x)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(t) &= \int_{B_R} \frac{\partial}{\partial t} D_0(t,x)\,dx \\ &= -\sum_{j=1}^{d} \int_{B_R} (-1)^j \frac{\partial}{\partial x_j} D_j(t,x)\,dx \\ &= -\sum_{j=1}^{d} (-1)^j \int_{\partial B_R} D_j(t,x) \frac{x_j}{R}\,d\sigma \end{aligned}$$

である. 他方, φ の性質 3. より $x \in \partial B_R$ のとき $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) = 0$ であるから, $x \in \partial B_R$ において

$$D_j(t,x) = \det(\varphi_t(t,x), \varphi_{x_1}(t,x), \ldots, \varphi_{x_{j-1}}(t,x), \varphi_{x_{j+1}}(t,x), \ldots, \varphi_d(t,x)) = 0$$

が成り立つ. したがって, $\frac{d}{dt} I(t) = 0$, すなわち関数 I は区間 $[0,1]$ 上定数関数である. ところが, これは $I(0) \neq 0$, $I(1) = 0$ に矛盾する. 以上より, 関数 f は不動点を持たなければならない. これで定理が証明された. □

参考文献

[1] 増田久弥, 非線型数学, 朝倉書店 (1985).