Rellich-Kondrachov の定理

川越 大輔

2021 年 6 月 2 日

1　イントロダクション

本稿では, Rellich-Kondrachov の定理について概説する.

$n \geq 2$, Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界領域とし, その境界 $\partial\Omega$ は C^1 級であると仮定する. このとき, Sobolev 空間 $W^{m,p}(\Omega)$ と Lebesgue 空間 $L^p(\Omega)$ には次のような包含関係があった.

定理 1.1 (Sobolev の埋蔵定理)**.** $m \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ とする. このとき, 次の包含関係が成立する.

1. $1/p - m/n > 0$ のとき, $1/q = 1/p - m/n$ を満たす実数 q に対して $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ が成立する.

2. $1/p - m/n = 0$ のとき, $q \geq p$ を満たす任意の実数 q に対して $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ が成立する.

3. $1/p - m/n < 0$ のとき, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ が成立する. さらに, $p < \infty$ かつ $m - n/p > 0$ が整数でないと仮定して, $k := [m - n/p]$, $\theta := m - n/p - k$ とおくと, ある定数 C が存在して, 任意の $u \in W^{m,p}(\Omega)$ に対して

$$\begin{aligned} &\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}, && |\alpha| \leq k, \\ &|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}|x-y|^\theta, && |\alpha| = k, \quad x, y \in \overline{\Omega} \end{aligned}$$

が成立する. 特に, $W^{m,p}(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega})$ である.

定理 1.1 の証明は, $m = 1$ の場合に帰着される. Rellich-Kondrachov の定理は, この包含がコンパクト埋め込みであることを主張する.

定理 1.2 (Rellich-Kondrachov の定理)**.** $1 \leq p < \infty$ とする. このとき, 次の包含はコンパクト埋め込みである.

1. $1/p - 1/n > 0$ のとき, $1/q = 1/p - 1/n$ を満たす実数 q に対して $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$.

2. $1/p - 1/n = 0$ のとき, $q \geq p$ を満たす任意の実数 q に対して $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$.

3. $1/p - 1/n < 0$ のとき, $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

特に, 包含 $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ は任意の n と p についてコンパクト埋め込みである.

2 Kolmogorov-Riesz-Fréchet の定理

定理 1.2 の証明の準備として, 次の補題を示す.

補題 2.1 (Kolmogorov-Riesz-Fréchet の定理)**.** $1 \le p < \infty$ とし, $\mathcal{F}$ を $L^p(\mathbb{R}^n)$ の有界集合とする. いま, 任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して, $h \in \mathbb{R}^n$ が $|h| < \delta$ を満たすならば

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \epsilon \tag{2.1}$$

が任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して成立すると仮定する. さらに, Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界集合とし,

$$\mathcal{F}|_\Omega := \{ f|_\Omega \mid f \in \mathcal{F} \}$$

と定義する. このとき, $\mathcal{F}|_\Omega$ は $L^p(\Omega)$ で相対コンパクトである.

Proof. 証明は Brezis [2] に基づき 4 段階に分けて行う.

$\{\rho_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を mollifier, すなわち $\rho_m \ge 0$, $\operatorname{supp} \rho_m \subset B(0, 1/m)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_m(x) \, dx = 1$$

を満たすものとする. このとき, 任意の $f \in \mathcal{F}$ と任意の $m > 1/\delta$ に対して

$$\|\rho_m * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \epsilon \tag{2.2}$$

が成立する. 実際, Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} |(\rho_m * f)(x) - f(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| \rho_m(y) \, dy \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_m(y) \, dy \right)^{1/p} \end{aligned}$$

がほとんど至るところの $x \in \mathbb{R}^n$ で成立するから, これを積分して

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |(\rho_m * f)(x) - f(x)| \, dx &\le \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \rho_m(y) \, dy \right) dx \\ &= \int_{B(0,1/m)} \rho_m(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \, dx \right) dy \\ &\le \epsilon^p \end{aligned}$$

が得られる. ここで, m および $\mathcal{F}$ に対する仮定を用いた. 従って, 任意の $f \in \mathcal{F}$ と任意の $m > 1/\delta$ に対して (2.2) が成立することが証明された.

次に, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して m のみに依存する定数 C_m が存在して, 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して

$$\|\rho_m * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C_m \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.3}$$

および任意の $f \in \mathcal{F}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$|(\rho_m * f)(x_1) - (\rho_m * f)(x_2)| \le C_m \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |x_1 - x_2| \tag{2.4}$$

が成立することを証明する．再び Hölder の不等式より任意の $f \in \mathcal{F}$, $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$|(\rho_m * f)(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||\rho_m(y)|\,dy \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|\rho_m\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ．ただし，p' は $1 < p' \le \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ を満たすものである．また，$\nabla(\rho_m * f) = (\nabla\rho_m) * f$ が成り立つから，任意の $f \in \mathcal{F}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}|(\rho_m * f)(x_1) - (\rho_m * f)(x_2)| \le& \int_{\mathbb{R}^n} |(x_1 - x_2)\cdot\nabla(\rho_m * f)(x_2 + t(x_1 - x_2))|\,dt \\ \le& |x_1 - x_2|\|(\nabla\rho_m) * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ \le& \|\nabla\rho_m\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}|x_1 - x_2|\end{aligned}$$

が成り立つ．$C_m := \max\{\|\rho_m\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}, \|\nabla\rho_m\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\}$ と取れば，(2.3) および (2.4) が従う．

続いて，任意の $\epsilon > 0$ と $\mathbb{R}^n$ の任意の有界領域 Ω に対してある部分領域 $\omega \subset \Omega$ が存在して，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} < \epsilon \tag{2.5}$$

が成立することを確認する．Minkowski の不等式より

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} \le \|f - (\rho_m * f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\rho_m * f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)}$$

が成立するが，(2.2) より $m > 1/\delta$ を満たすように m を取れば $\|f - (\rho_m * f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \epsilon$ が成り立つ．また，$\rho_m * f$ は Ω 上で有界連続であるから，$\omega \subset \Omega$ を適切に取れば $\|\rho_m * f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} < \epsilon$ が成り立つようにできる．よって，(2.5) が成立するように $\omega \subset \Omega$ を取ることができる．

以上の準備を踏まえ，最後に補題 2.1 を証明する．$\epsilon > 0$ を 1 つ取り，これに応じて (2.1) が成立するように $\delta > 0$ を 1 つ取って固定する．さらに，$m > 1/\delta$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ を 1 つ取り固定する．加えて，$\mathbb{R}^n$ の有界領域 Ω を 1 つ取り，(2.5) が成り立つように部分領域 ω を 1 つ取り固定する．このとき，

$$\mathcal{H} := \{(\rho_m * f)|_{\overline{\omega}} \mid f \in \mathcal{F}\}$$

で定義すると，(2.3) および (2.4) より $\mathcal{H}$ は $\overline{\omega}$ 上で一様有界かつ同程度連続である．よって，Ascoli-Arzelà の定理より $\mathcal{H}$ は $C(\overline{\omega})$ で相対コンパクトである．したがって，$\mathcal{H}$ は $L^p(\omega)$ でも相対コンパクトである．ゆえに，$\mathcal{H}$ は $L^p(\omega)$ における半径 ϵ の有限個の球で被覆できる．すなわち，ある $\{g_i\}_{i=N} \subset L^p(\omega)$ が存在して，

$$\mathcal{H} \subset \cup_{i=1}^N B(g_i, \epsilon)$$

とできる．

そこで，Ω 上の関数 $\overline{g_i}$ を

$$\overline{g_i} := \begin{cases} g_i, & \text{on } \omega, \\ 0, & \text{on } \Omega\setminus\omega \end{cases}$$

で定義し，$L^p(\Omega)$ の開球 $B(\overline{g_i}, 3\epsilon)$, $1 \le i \le N$ を考える．このとき，

$$\mathcal{F}|_\Omega \subset \cup_{i=1}^N B(\overline{g_i}, 3\epsilon)$$

が成立する．実際, 任意の $f \in \mathcal{F}|_\Omega$ に対して

$$\|(\rho_m * f) - g_i\|_{L^p(\omega)} < \epsilon$$

が成り立つ i が存在する．$\overline{g_i}$ の定義より

$$\|f - \overline{g_i}\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega\setminus\omega} |f(x)|^p \, dx + \int_\omega |f(x) - g(x)|^p \, dx$$

であるから, (2.2), (2.5) より

$$\begin{aligned}\|f - \overline{g_i}\|_{L^p(\Omega)} <& \epsilon + \|f - g_i\|_{L^p(\omega)} \\ \le& \epsilon + \|f - (\rho_m * f)\|_{L^p(\Omega)} + \|(\rho_m * f) - g_i\|_{L^p(\omega)} \\ \le& 3\epsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち, $f \in B(\overline{g_i}, 3\epsilon)$ である．したがって, $\mathcal{F}|_\Omega \subset \cup_{i=1}^N B(\overline{g_i}, 3\epsilon)$ が証明された．

以上により, $\mathcal{F}|_\Omega$ が $L^p(\Omega)$ で相対コンパクトであることが証明された． □

3 定理 1.2 の証明

定理 1.2 の証明を行う．$p > n$ の場合は, 定理 1.1 と Ascoli-Arzelà の定理から結論が従う．また, $p = n$ の場合は $1 \le p < n$ の場合と同様にして証明される．よって, 以下では $1 \le p < n$ の場合について証明する．

$\mathcal{H}$ を $W^{1,p}(\Omega)$ の単位球, $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ を延長作用素とし, $\mathcal{F} := P(\mathcal{H})$ とおく．$\mathcal{H}$ が $L^q(\Omega)$, $1 \le q < p^*$ で相対コンパクトであることを証明するために, $\mathcal{F}$ が補題 2.1 の仮定を満たすことを証明する．

まず, $q \ge p$ の場合のみ考えれば十分であることに注意する．実際, $1 \le q < p$ のとき, 任意の $u \in W^{1,p}(\Omega)$ に対して

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le |\Omega|^{p/(p-q)} \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

が成り立つから, $W^{1,p}(\Omega)$ の有界点列 $\{u_n\}$ が $L^p(\Omega)$ で強収束するならば, $L^q(\Omega)$ でも強収束する．よって, $1 \le q < p$ の場合については, $q = p$ の場合のみを考えればよい．

$q \ge p$ とする．$\mathcal{F}$ は $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ で有界であるから, 定理 1.1 より $\mathcal{F}$ は $L^q(\mathbb{R}^n)$ でも有界である．よって, 以下では任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して, $h \in \mathbb{R}^n$ が $|h| < \delta$ を満たすならば

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^q \, dx \right)^{1/q} < \epsilon$$

が任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して成立することを証明すればよい．

ところで, 任意の $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ と任意の $h \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h) - u(x)|^p \, dx \le |h|^p \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p \, dx$$

が成り立つ. 実際, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h)-u(x)|^p\,dx =& \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x+th)\,dt \right|^p dx \\
\le& |h|^p \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 |\nabla u(x+th)|\,dt \right)^p dx \\
\le& |h|^p \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x+th)|^p\,dx\,dt \\
=& |h|^p \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p\,dx
\end{aligned}
$$

が成り立つ. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ で稠密であるから, この不等式は任意の $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つ.

$F := \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$ とおく. 先の不等式から, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta = \epsilon/F$ ととれば, $|h| < \delta$ のとき

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h)-u(x)|^p\,dx \right)^{1/p} \le |h| \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \epsilon
$$

が任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して成り立つ. また, $p \le q < p^*$ に対してある $0 < \alpha \le 1$ が存在して,

$$
\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}
$$

が成り立つ. よって, 補間定理より

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h)-u(x)|^q\,dx \right)^{1/q} \le& \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h)-u(x)|^p\,dx \right)^{\alpha/p} \\
&\times \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h)-u(x)|^{p^*}\,dx \right)^{(1-\alpha)/p^*} \\
\le& |h|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\alpha (2\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)})^{1-\alpha} \\
\le& C|h|^\alpha
\end{aligned}
$$

が成り立つ. ここで, $p < n$ のとき $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ であるから $\mathcal{F}$ が $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ で有界であることを用いた. この評価から, $\mathcal{F}$ が $L^q(\mathbb{R}^n)$ で不等式 (2.1) を満たすことが分かる.

以上より, 補題 2.1 から定理 1.2 が成立することが分かる.

参考文献

[1] R. Adams and J. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 2nd edition (2003).

[2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, (2011).

[3] 黒田 成俊, 関数解析, 共立出版 (1980).

[4] 宮島 静雄, 関数解析, 横浜図書, 第 2 版 (2014).