Sobolev の埋蔵定理

川越 大輔

2021 年 5 月 22 日

本稿では, Sobolev の埋蔵定理について概説する.

1　全空間における Sobolev の埋蔵定理

全空間 $\mathbb{R}^n$ 上の Sobolev 空間 $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ について, 次の埋蔵定理が知られている.

定理 1.1 (Sobolev の埋蔵定理)**.** $n \geq 2$, $m \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ とする. このとき, 次の包含関係が成立する.

1. $1/p - m/n > 0$ のとき, $1/q = 1/p - m/n$ を満たす実数 q に対して $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ が成立する.

2. $1/p - m/n = 0$ のとき, $q \geq p$ を満たす任意の実数 q に対して $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ が成立する.

3. $1/p - m/n < 0$ のとき, $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ が成立する. さらに, $p < \infty$ かつ $m - n/p > 0$ が整数でないと仮定して, $k := [m - n/p]$, $\theta := m - n/p - k$ とおくと, ある定数 C が存在して, 任意の $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}, && |\alpha| \leq k, \\
&|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}|x-y|^\theta, && |\alpha| = k, \quad x, y \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

   が成立する. 特に, $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset C^k(\mathbb{R}^n)$ である.

補足 1. $p = 1$, $m = n$ の場合は例外的に $W^{n,1}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ が成立する. 実際, 任意の $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$
|u(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \cdots dt_n \right| \leq \|u\|_{W^{n,1}(\mathbb{R}^n)}
$$

が成立する. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $W^{n,1}(\mathbb{R}^n)$ で稠密であるから, 任意の $u \in W^{n,1}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$
\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{W^{n,1}(\mathbb{R}^n)}
$$

が成立する.

補足 2. 定理 1.1 は Brezis [2] を参照した. $p = \infty$ の場合についても定理は成立するようであるが, その証明は確認していない.

定理 1.1 の証明は, $m = 1$ の場合に帰着される. 以下では $m = 1$ の場合に限って定理 1.1 を証明する.

1.1　$1 \le p < n$ の場合

定理 1.2 (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg の定理)**.** $1 \le p < n$ とする．このとき, $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ が成立する．ただし, p^* は $1/p^* = 1/p + 1/n$ を満たす実数である．また, ある定数 C が存在して, 任意の $u \in W^{1,p}(\Omega)$ に対して

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ.

補足 3 (スケール不変性)**.** 定理 1.2 の定数 p^* は次の考察によって導かれる．$u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\lambda > 0$ に対して, $u_\lambda(x) := u(\lambda x)$ で関数 u_λ を定める．変数変換により

$$\begin{aligned}\|u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} =& \lambda^{-n/p}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\\ \|\nabla u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} =& \lambda^{1-n/p}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

が得られる．よって, ある定数 p, q, C が存在して, 任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C\|\nabla u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つようにしようとすると, 任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C\lambda^{1-n/p+n/q}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立たなければならない．これが成り立つのは, $1 - n/p + n/q = 0$, すなわち $1/q = 1/p - 1/n = 1/p^*$ のときである.

定理 1.2 の証明のため, 次の補題を準備する.

補題 1.3. $m \in \mathbb{N}$ とし, p_i, $1 \le i \le m$ は $1 \le p_i \le \infty$, $\sum_{i=1}^m 1/p_i = 1$ を満たすとする．このとき, $f_i \in L^{p_i}(\mathbb{R})$, $1 \le i \le m$ ならば $\prod_{i=1}^m f_i \in L^1(\mathbb{R})$ であり,

$$\left\|\prod_{i=1}^m f_i\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \le \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^{p_i}(\mathbb{R})}$$

が成り立つ.

Proof. 数学的帰納法により証明する．$m = 1$ のときは $p_1 = 1$ であるから補題は自明に成立する．よって以下では $m = k$ のときに補題が成立すると仮定して, $m = k + 1$ のときも補題が成立することを証明する.

$p_j = 1$ となる j が存在する場合は, $\sum_{i=1}^{k+1} 1/p_i = 1$ の仮定によりこのような j は 1 つしか存在せず, $i \ne j$ のとき $p_i = \infty$ でなければならない．よって,

$$\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{k+1} |f_i(x)|\, dx \le \|f_j\|_{L^1(\mathbb{R})} \prod_{i \ne j} \|f_i\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

と評価されるので補題が成立する.

Hölder の不等式より,

$$\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{k+1} |f_i(x)| \, dx \le \left(\int_{\mathbb{R}} |f_{k+1}(x)|^{p_{k+1}} \, dx \right)^{1/p_{k+1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{k} |f_i(x)|^{p'_{k+1}} \, dx \right)^{1/p'_{k+1}}$$

が成り立つ. ただし, p'_{k+1} は $1/p_{k+1} + 1/p'_{k+1} = 1$ を満たす実数である. ここで $q_i := p_i/p'_{k+1}$, $1 \le i \le k$ とおくと,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{q_i} = p'_{k+1} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} = p'_{k+1}(1 - \frac{1}{p_{k+1}}) = 1$$

であり, 各 $1 \le i \le k$ について $|f_i|^{p'_{k+1}} \in L^{q_i}(\mathbb{R})$ が成り立つ. よって, 帰納法の仮定により

$$\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{k} |f_i(x)|^{p'_{k+1}} \, dx \le \prod_{i=1}^{k} \| |f_i|^{p'_{k+1}} \|_{L^{q_i}(\mathbb{R})} = \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{L^{p_i}(\mathbb{R})}^{p'_{k+1}}$$

が成り立つ. これにより,

$$\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{k+1} |f_i(x)| \, dx \le \|f_{k+1}\|_{L^{p_{k+1}}(\mathbb{R})} \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{L^{p_i}(\mathbb{R})} = \prod_{i=1}^{k+1} \|f_i\|_{L^{p_i}(\mathbb{R})}$$

が得られる. したがって, $\prod_{i=1}^{k+1} f_i \in L^1(\mathbb{R})$ であり,

$$\left\| \prod_{i=1}^{k+1} f_i \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \le \prod_{i=1}^{k+1} \|f_i\|_{L^{p_i}(\mathbb{R})}$$

が成り立つ. これで補題が証明された. □

補題 1.4. $n \ge 2$ とし, $f_1, \ldots, f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ とする. また, $x \in \mathbb{R}^n$, $1 \le i \le n$ に対して, x の第 i 成分を除いたものを $\tilde{x}_i$, すなわち

$$\tilde{x}_i := (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

とする. このとき,

$$f(x) := \prod_{i=1}^{n} f_i(\tilde{x}_i), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

で定義される関数 f は $L^1(\mathbb{R}^n)$ に属し,

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

が成り立つ.

Proof. 数学的帰納法により示す. $n = 2$ のとき, これは Tonelli の定理に他ならない. よって以下では, $n = k$ のときに補題が成立すると仮定して, $n = k + 1$ のときも補題が成立することを証明する.

まずは $x_{k+1} \in \mathbb{R}$ を1つ固定して議論する．このとき, Hölder の不等式より

$$\int_{\mathbb{R}^k} |f(x)|\, d\tilde{x}_{k+1} \leq \|f_{k+1}\|_{L^k(\mathbb{R}^k)} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \prod_{i=1}^{k} |f_i(\tilde{x}_i)|^{k'}\, d\tilde{x}_{k+1} \right)^{1/k'}$$

が成り立つ．ただし, k' は $1/k + 1/k' = 1$ を満たす実数である．ここで各 $1 \leq i \leq k$ について

$$\int_{\mathbb{R}^{k-1}} |f_i(\tilde{x}_i)|^{k'(k-1)}\, dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_k = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} |f_i(\tilde{x}_i)|^{k}\, dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_k$$

が成り立つが, $f_i \in L^k(\mathbb{R}^k)$ であるから Fubini の定理よりこの積分はほとんど至るところの $x_{k+1} \in \mathbb{R}$ について有限確定する．よって各 $|f_i(\cdot, x_{k+1})|^{k'}$, $1 \leq i \leq k$ は帰納法の仮定を満たすから,

$$\int_{\mathbb{R}^k} \prod_{i=1}^{k} |f_i(\tilde{x}_i)|^{k'}\, d\tilde{x}_{k+1} \leq \prod_{i=1}^{k} \||f_i(\cdot, x_{k+1})|^{k'}\|_{L^{k-1}(\mathbb{R}^{k-1})} = \prod_{i=1}^{k} \|f_i(\cdot, x_{k+1})\|_{L^k(\mathbb{R}^{k-1})}^{k'}$$

が成り立つ．これを元の不等式に代入して

$$\int_{\mathbb{R}^k} |f(x)|\, d\tilde{x}_{k+1} \leq \|f_{k+1}\|_{L^k(\mathbb{R}^k)} \prod_{i=1}^{k} \|f_i(\cdot, x_{k+1})\|_{L^k(\mathbb{R}^{k-1})}$$

を得る．

次に, この不等式を x_{k+1} について積分することを考える．各 i について, $f_i \in L^k(\mathbb{R}^k)$ であるから, $\|f_i(\cdot, x_{k+1})\|_{L^k(\mathbb{R}^{k-1})}$ は x_{k+1} に対して k 乗可積分である．よって, 補題 1.3 が適用できて,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^k} |f(x)|\, d\tilde{x}_{k+1}\, dx_{k+1} \leq & \|f_{k+1}\|_{L^k(\mathbb{R}^k)} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{k} \|f_i(\cdot, x_{k+1})\|_{L^k(\mathbb{R}^{k-1})}\, dx_{k+1} \\ \leq & \|f_{k+1}\|_{L^k(\mathbb{R}^k)} \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{L^k(\mathbb{R}^k)},\end{aligned}$$

すなわち

$$\int_{\mathbb{R}^{k+1}} |f(x)|\, dx \leq \prod_{i=1}^{k+1} \|f_i\|_{L^k(\mathbb{R}^k)}$$

が成り立つ．したがって, $n = k + 1$ のときも補題が成立することが分かった． □

定理 *1.2* の証明. $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $m \geq 1$ とする．このとき, 各 $1 \leq i \leq n$ について,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|u(x)|^{m-1} u(x)) = m|u(x)|^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

が成り立つ．よって,

$$||u(x)|^{m-1} u(x)| = m \left| \int_{-\infty}^{x_i} |u(t, \tilde{x}_i)|^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, \tilde{x}_i)\, dt \right|$$

$$\leq m \int_{-\infty}^{\infty} |u(t, \tilde{x}_i)|^{m-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, \tilde{x}_i) \right| dt$$

が成り立つ. ただし, $(t, \tilde{x}_i)$ は $(x_1, \ldots, x_{i-1}, tx_{i+1}, \ldots, x_n)$ を表すものとする.

$$f_i(\tilde{x}_i) := \int_{-\infty}^{\infty} |u(t, \tilde{x}_i)|^{m-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, \tilde{x}_i) \right| dt$$

とおけば, i に関する不等式の積をとって

$$|u(x)|^{mn} \leq m^n \prod_{i=1}^{n} f_i(\tilde{x}_i)$$

となる. よって,

$$|u(x)|^{mn/(n-1)} \leq m^{n/(n-1)} \prod_{i=1}^{n} f_i(\tilde{x}_i)^{1/(n-1)}$$

が得られる.

ここで, $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ であるから, 各 i について $f_i \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ である. よって, $f_i^{1/(n-1)} \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ である. したがって, 補題 1.4 より $\prod_{i=1}^{n} f_i(\tilde{x}_i)^{1/(n-1)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であって,

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} f_i(\tilde{x}_i)^{1/(n-1)} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i^{1/(n-1)}\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{1/(n-1)}$$

が得られる. この評価から

$$\|u\|_{L^{mn/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}^{mn/(n-1)} \leq m^{n/(n-1)} \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{1/(n-1)}$$

が得られる. さらに, $1/p + 1/q = 1$ となる q を用いて

$$\|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{m-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| dx \leq \|u\|_{L^{(m-1)q}(\mathbb{R}^n)}^{m-1} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つから,

$$\|u\|_{L^{mn/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}^{mn/(n-1)} \leq m^{n/(n-1)} \|u\|_{L^{(m-1)q}(\mathbb{R}^n)}^{(m-1)n/(n-1)} \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1/(n-1)} \tag{1.1}$$

と評価できる.

$p = 1$ の場合は $p^* = n/(n-1)$ であるから, 不等式 (1.1) で $m = 1$ として

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{n/(n-1)} \leq \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/(n-1)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{n/(n-1)},$$

すなわち

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

を得る. また, $1 < p < n$ の場合は $mn/(n-1) = (m-1)q$, すなわち $m = p^*(n-1)/n$ とれば, $mn/(n-1) = (m-1)q = p^*$ であり, 不等式 (1.1) は

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*} \le m^{n/(n-1)} \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{p^*-n/(n-1)} \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1/(n-1)}$$

と書き換えられる. これを整理して

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le m \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1/n} \le m \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

が得られる.

以上より, $1 \le p < n$, $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ の場合に定理の不等式が示された. $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ は $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ で稠密であるから, 定理の不等式が任意の $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ について成立することが分かる. したがって, 定理は証明された. □

系 1.5. $1 \le p < n$ とする. このとき, $p \le q \le p^*$ を満たす任意の q に対して $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ.

Proof. 定義より $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ であり, 定理 1.2 より $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つから, 補間定理により結論が従う. □

1.2 $p = n$ の場合

系 1.6. $n \le q < \infty$ を満たす任意の q に対して, $W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ.

Proof. $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ を仮定する. このとき, 不等式 (1.1) より, 任意の $m \ge 1$ に対して

$$\|u\|_{L^{mn/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}^{mn/(n-1)} \le m^{n/(n-1)} \|u\|_{L^{(m-1)n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}^{(m-1)n/(n-1)} \|\nabla u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}^{n/(n-1)},$$

すなわち

$$\|u\|_{L^{mn/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \le m^{1/(m-1)} \|u\|_{L^{(m-1)n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}^{1/m'} \|\nabla u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}^{1/m}$$

が成り立つ. ただし, m' は $1/m + 1/m' = 1$ を満たすものとする.

$m > 1$ のとき, Young の不等式より

$$\|u\|_{L^{(m-1)n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}^{1/m'} \|\nabla u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}^{1/m} \le m' \|u\|_{L^{(m-1)n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} + m \|\nabla u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

であるから, m, n, q のみに依存するある定数 C が存在して,

$$\|u\|_{L^{mn/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \le C \left(\|u\|_{L^{(m-1)n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \right)$$

が成り立つ.

ここでまず $m = n$ とおくと,

$$\|u\|_{L^{n^2/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \le C \left(\|u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \right) = C \|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ. よって補間定理より $n \le q \le n^2/(n-1)$ を満たす任意の q に対して

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C \|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.2}$$

が成り立つ. 次に $m=n+1$ とおくと

$$\|u\|_{L^{n(n+1)/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(\|u\|_{L^{n^2/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}\right)$$

が成り立つが, 先の評価により C を取り換えることで

$$\|u\|_{L^{n(n+1)/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立ち, 補間定理により $n \leq q \leq n(n+1)/(n-1)$ を満たす任意の q に対して不等式 (1.2) が成立する. 以下, この手順を繰り返して $n \leq q < \infty$ を満たす任意の q に対して不等式 (1.2) が成り立つことが示される.

$C_0^1(\mathbb{R}^n)$ は $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ で稠密であるから, 不等式 (1.2) から結論が従う. □

1.3 $p > n$ の場合

定理 1.7 (Morrey の定理)**.** $n < p \leq \infty$ とする. このとき, $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ. さらに, $n < p < \infty$ のとき, 任意の $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^{1-n/p}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.3}$$

がほとんど至るところ $x, y \in \mathbb{R}^n$ で成り立つ. したがって, 測度零集合上で u を修正すれば, $u \in C^{1-n/p}(\mathbb{R}^n)$ となる.

Proof. Q を各辺が座標軸と平行な立方体であって原点 O を含むものとする. また, r を立方体 Q の一辺の長さとする. このとき, $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $x \in Q$ に対して

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}u(tx)\,dt$$

が成立する. これを評価して

$$|u(x) - u(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n |x_i| \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dt \leq r\sum_{i=1}^n \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dt \tag{1.4}$$

が得られる.

ここで,

$$\tilde{u} := \frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)\,dx$$

とおく. 不等式 (1.4) を Q 上で積分することで,

$$\begin{aligned}
|\tilde{u} - u(0)| =& \left|\frac{1}{Q}\int_Q (u(x) - u(0))\,dx\right| \\
\leq& \frac{1}{r^{n-1}}\sum_{i=1}^n \int_Q \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dt\,dx \\
=& \frac{1}{r^{n-1}}\sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_{tQ} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| dy\,\frac{dt}{t^n}
\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに, Hölder の不等式より,

$$\int_{tQ} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \right| dy \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(Q)} (tr)^{n/p'}$$

が成り立つ．ただし, p' は $1/p + 1/p' = 1$ を満たす実数である．よって,

$$|\tilde{u} - u(0)| \leq r^{n/p'-n+1} \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(Q)} \int_0^1 t^{n/p'-n}\, dt \leq \frac{nr^{1-n/p}}{1-n/p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ．

$\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 測度は平行移動に関して不変であるから, 原点 O の代わりに点 $x \in \mathbb{R}^n$ を考えることで, 点 x を含むような立方体 Q に対して

$$|\tilde{u} - u(x)| \leq \frac{nr^{1-n/p}}{1-n/p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.5}$$

が成り立ち, さらに三角不等式から任意の $x, y \in Q$ に対して

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{2nr^{1-n/p}}{1-n/p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ．任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して, 各辺が座標軸に平行で一辺の長さが $r = 2|x-y|$ であり, かつ $x, y \in Q$ となるような立方体 Q が取れるから, 不等式 (1.3) が証明された．

包含関係 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ を示す．$p = \infty$ のときは自明であるから, $p < \infty$ の場合について証明する．$x \in \mathbb{R}^n$ とし, Q で x を含み一辺の長さが Q の立方体を表すとする．このとき,

$$|\tilde{u}| = \left| \int_Q u(x)\, dx \right| \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つことに注意すれば, 不等式 (1.5) より

$$|u(x)| \leq |\tilde{u}| + C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ．x の取り方は任意であったから, これより

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

が従う．

以上の議論では $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ を仮定していたが, $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ における $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ の稠密性により任意の $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ に対しても成立する． □

2 半空間または有界領域における Sobolev の埋蔵定理

Ω を半空間 $\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ または C^1 級の境界をもつ有界領域とする．このとき, 延長作用素

$$P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

が有界線型作用素として定義できる．このことを利用すれば, 定理 1.1 より次の定理が従う．

定理 2.1. $n \geq 2$, $m \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ とする. このとき, 次の包含関係が成立する.

1. $1/p - m/n > 0$ のとき, $1/q = 1/p - m/n$ を満たす実数 q に対して $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ が成立する.

2. $1/p - m/n = 0$ のとき, $q \geq p$ を満たす任意の実数 q に対して $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ が成立する.

3. $1/p - m/n < 0$ のとき, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ が成立する. さらに, $p < \infty$ かつ $m - n/p > 0$ が整数でないと仮定して, $k := [m - n/p]$, $\theta := m - n/p - k$ とおくと, ある定数 C が存在して, 任意の $u \in W^{m,p}(\Omega)$ に対して

$$\begin{aligned} &\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}, && |\alpha| \leq k, \\ &|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}|x - y|^\theta, && |\alpha| = k, \quad x, y \in \Omega \end{aligned}$$

が成立する. 特に, $W^{m,p}(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega})$ である.

補足 4. 延長作用 P の存在を保証するため Ω の境界が C^1 級であることを仮定したが, この条件は緩めることができる. 詳しくは Adams, Fournier [1] を参照すること.

参考文献

[1] R. Adams and J. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 2nd edition (2003).

[2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, (2011).

[3] 黒田 成俊, 関数解析, 共立出版 (1980).

[4] 宮島 静雄, 関数解析, 横浜図書, 第 2 版 (2014).