一般化 Tricomi 方程式の閉 Dirichlet 問題の超関数解および強解について

Daisuke Kawagoe

2021 年 5 月 5 日

1　閉境界値問題

次の境界値問題を考える．

$$Lu := K(y)u_{xx} + u_{yy} = f \text{ in } \Omega, \tag{1.1}$$

$$Bu = g \text{ on } \partial\Omega. \tag{1.2}$$

ただし, 係数 K は $\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数で, $K(0) = 0$ かつ $y \neq 0$ で $yK(y) > 0$ を満たす．また, f, g は与えられた関数で, B は適当な trace operator である．領域 Ω は $\mathbb{R}^2$ の有界領域とし, 境界 $\partial\Omega$ は区分的に C^1 級であると仮定する．さらに, $\mathbb{R}_\pm := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \pm y > 0\}$ とし, 領域 Ω は $\Omega_\pm := \Omega \cap \mathbb{R}_\pm \neq \emptyset$ であると仮定する．

方程式 (1.1) を Tricomi 型の方程式, Chaplygin 方程式, または Frankl' 方程式と呼ぶ．また, 条件 (1.2) を閉境界条件と呼ぶ. 閉境界条件に対して, 境界の (真) 部分集合 Γ 上のみで与えられる境界条件のことを開境界条件と呼ぶ.

開境界値問題と比較して, 閉境界値問題 (1.1)-(1.2) はあまり研究が進んでおらず, 代表的な結果は 2 つしかない．1 つは Morawetz (1970) [2] によるもので, $K(y) = y$ (Tricomi 方程式) の場合の Dirichlet 問題の適切性が議論された．もう 1 つは Pilant (1985) [3] によるもので, $K(y) = \mathrm{sgn}(y)$ (Lavrent'ev–Bitsadze 方程式) の場合の Neumann 問題の適切性が議論された.

2　Dirichlet 問題の超関数解

閉境界値問題 (1.1)-(1.2) として, 次の Dirichlet 問題を考える．

$$\begin{cases} Lu := K(y)u_{xx} + u_{yy} = f & \text{in } \Omega, \\ Bu := u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Sobolev 空間 $H_0^1(\Omega; K)$ を導入する．重み付き Sobolev ノルム $\|\cdot\|_{H^1(\Omega;K)}$ を

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega;K)} := \int_\Omega \left(|K(y)|u_x(x, y)^2 + u_y(x, y)^2 + u(x, y)^2\right) dxdy$$

で定義し, $H_0^1(\Omega; K)$ を $\|\cdot\|_{H^1(\Omega;K)}$ に関する $C_0^\infty(\Omega)$ の閉包として定義する．

このとき, $H_0^1(\Omega; K)$ おいて, Poincaré の不等式が成り立つ.

命題 2.1 (Poincaré の不等式)**.** ある定数 $C_P = C_P(\Omega; K)$ が存在し, すべての $u \in H_0^1(\Omega; K)$ に対して

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_P \int_\Omega \left(|K(y)|u_x(x,y)^2 + u_y(x,y)^2\right) dxdy$$

が成り立つ.

注意 1. 実際には, より強い不等式が成り立つ. すなわち, ある定数 $C = C(\Omega)$ が存在して,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_\Omega u_y(x,y)^2 \, dxdy$$

が成り立つ.

Poincaré の不等式から,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega;K)}^2 := \int_\Omega \left(|K(y)|u_x(x,y)^2 + u_y(x,y)^2\right) dxdy$$

も Sobolev 空間 $H_0^1(\Omega; K)$ のノルムとなる.

$H_0^1(\Omega; K)$ の双対空間を $H^{-1}(\Omega; K)$ と書く. $H^{-1}(\Omega; K)$ のノルム $\|\cdot\|_{H^{-1}(\Omega;K)}$ を

$$\|w\|_{H^{-1}(\Omega;K)} := \sup_{0 \neq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\langle w, \varphi \rangle}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega;K)}}$$

で定義する. ただし, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $H^{-1} - H^1$ dual pair を表す.

上の定義から, 次の不等式が直ちに従う.

命題 2.2 (一般化された Schwarz の不等式)**.** 任意の $w \in H^{-1}(\Omega; K)$ と任意の $\varphi \in H_0^1(\Omega; K)$ に対し,

$$|\langle w, \varphi \rangle| \leq \|w\|_{H^{-1}(\Omega;K)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega;K)}$$

が成り立つ.

係数関数 K について, 次の条件を導入する.

定義 1. 関数 $K \in C^1(\mathbb{R})$ が type change function であるとは, K が次の 4 つの条件を満たすことである.

1. $K(0) = 0$,
2. $y \neq 0$ で $yK(y) > 0$,
3. $K'(y) > 0$,
4. ある正の定数 δ が存在して $1 + (2K/K')' \geq \delta$.

注意 2. $K(y) = y$ のとき,

- $K \in C^1(\mathbb{R})$,
- $K(0) = 0$,

- $y \neq 0$ のとき $yK(y) = y^2 > 0$,
- $K'(y) = 1 > 0$,
- $1 + (2K(y)/K'(y))' = 3 > 0$

である. よって, $K(y) = y$ は type change function である.

以上の設定の下, (1.1) の作用素 L を $L : H_0^1(\Omega; K) \to H^{-1}(\Omega; K)$ とみなす. このとき, 次の補題が成り立つ.

補題 2.3. Ω を区分的 C^1 級の境界をもつ $\mathbb{R}^2$ の有界領域とする. また, 関数 K は type change function とする. このとき, ある定数 $C_1 = C_1(\Omega; K)$ が存在して, 任意の $C_0^2(\Omega)$ に対して

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega;K)} \leq C_1 \|Lu\|_{L^2(\Omega)}$$

が成り立つ.

証明. $u \in C_0^2(\Omega)$ に対し,

$$Mu := au + bu_x + cu_y$$

と定義する. ただし, a, b, c は適当な関数である.

ここで, 内積

$$(Mu, Lu)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (au + bu_x + cu_y)(Ku_{xx} + u_{yy})\, dxdy$$

を考える.

$a, u \in C^1(\Omega)$ に対し,

$$\int_\Omega auu_x\, dxdy = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} au^2 n_1\, ds - \frac{1}{2}\int_\Omega a_x u^2\, dxdy$$

が成り立つことに注意すれば,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega auKu_{xx}\, dxdy &= \int_{\partial\Omega} aKuu_x n_1\, ds - \int_\Omega aKu_x^2\, dxdy \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega a_{xx}Ku^2\, dxdy - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} a_x Ku^2 n_1\, ds, \\
\int_\Omega auu_{yy}\, dxdy &= \int_{\partial\Omega} auu_y n_2\, ds - \int_\Omega au_y^2\, dxdy \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega a_{yy}u^2\, dxdy - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} a_y u^2 n_2\, ds, \\
\int_\Omega bu_xKu_{xx}\, dxdy &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} bKu_x^2 n_1\, ds - \frac{1}{2}\int_\Omega b_xKu_x^2\, dxdy, \\
\int_\Omega bu_xu_{yy}\, dxdy &= \int_{\partial\Omega} bu_xu_y n_2\, ds - \int b_y u_x u_y\, dxdy \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega b_x u_y^2\, dxdy - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} bu_y^2 n_1\, ds, \\
\int_\Omega cu_yKu_{xx}\, dxdy &= \int_{\partial\Omega} cKu_yu_x n_1\, ds - \int c_xKu_xu_y\, dxdy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\int_\Omega (cK)_y u_x^2\,dxdy-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} cKu_x^2 n_2\,ds,\\
\int_\Omega cu_y u_{yy}\,dxdy =&\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} cu_y^2 n_2\,ds-\frac{1}{2}\int_\Omega c_y u_y^2\,dxdy
\end{aligned}
$$

が得られる. ただし, $n=(n_1,n_2)$ は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである. 以上をまとめて,

$$
\begin{aligned}
(Mu,Lu)_{L^2(\Omega)} =&\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\alpha u_x^2+2\beta u_x u_y+\gamma u_y^2+(La)u^2\right)\,dxdy\\
&+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(2Mu(Ku_x,u_y)-(Ku_x^2+u_y^2)(b,c)-u^2(Ka_x,a_y)\right)\cdot n\,ds,\\
\alpha :=&-2aK-b_xK+(cK)_y, \beta:=-b_y-c_xK, \gamma:=-2a+b_x-c_y
\end{aligned}
$$

を得る.

ここで, $a=-1$, $b=0$, $c=\max\{0,-4K/K'\}$ とする. $u\in C_0^2(\Omega)$ であることに注意すると,

$$
\begin{aligned}
(Mu,Lu)_{L^2(\Omega_+)} =&\int_{\Omega_+}\left(K(y)u_x(x,y)^2+u_y(x,y)^2\right)\,dxdy\\
&+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_+\cap\{y=0\}}\left(2Mu(Ku_x,u_y)-(Ku_x^2+u_y^2)(b,c)-u^2(Ka_x,a_y)\right)\cdot n\,ds,\\
(Mu,Lu)_{L^2(\Omega_-)} =&\int_{\Omega_-}\left(1+\left(\frac{2K}{K'}\right)'\right)\left(K(y)u_x(x,y)^2+u_y(x,y)^2\right)\,dxdy\\
&+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_-\cap\{y=0\}}\left(2Mu(Ku_x,u_y)-(Ku_x^2+u_y^2)(b,c)-u^2(Ka_x,a_y)\right)\cdot n\,ds
\end{aligned}
$$

である. K に対する仮定より, c は $y=0$ 上で連続であるから, 法線ベクトルの向きに注意して

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_-\cap\{y=0\}}\left(2Mu(Ku_x,u_y)-(Ku_x^2+u_y^2)(b,c)-u^2(Ka_x,a_y)\right)\cdot n\,ds\\
=&-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_+\cap\{y=0\}}\left(2Mu(Ku_x,u_y)-(Ku_x^2+u_y^2)(b,c)-u^2(Ka_x,a_y)\right)\cdot n\,ds
\end{aligned}
$$

が成り立つ. よって,

$$
\begin{aligned}
(Mu,Lu)_{L^2(\Omega)} =&(Mu,Lu)_{L^2(\Omega_+)}+(Mu,Lu)_{L^2(\Omega_-)}\\
=&\int_{\Omega_+}\left(K(y)u_x(x,y)^2+u_y(x,y)^2\right)\,dxdy\\
&+\int_{\Omega_-}\left(1+\left(\frac{2K}{K'}\right)'\right)\left(K(y)u_x(x,y)^2+u_y(x,y)^2\right)\,dxdy\\
\geq&\min\{1,\delta\}\int_\Omega\left(|K(y)|u_x(x,y)^2+u_y(x,y)^2\right)\,dxdy\\
=&\min\{1,\delta\}\|u\|_{H_0^1(\Omega;K)}^2
\end{aligned}
$$

となる.

一方, Cauchy-Schwarz の不等式から,

$$|(Mu, Lu)_{L^2(\Omega)}| \leq \|Mu\|_{L^2(\Omega)} \|Lu\|_{L^2(\Omega)} \leq C_K \|u\|_{H^1(\Omega;K)} \|Lu\|_{L^2(\Omega)}.$$

ただし, $C_K := (2\max\{1, \sup(4K/K')^2\})^{1/2}$ である.

以上より,

$$\min\{1,\delta\}\|u\|^2_{H^1_0(\Omega;K)} \leq C_K \|u\|_{H^1(\Omega;K)} \|Lu\|_{L^2(\Omega)} \leq C_K(1+C_P)\|u\|_{H^1_0(\Omega;K)} \|Lu\|_{L^2(\Omega)}.$$

辺々を整理して, 結論を得る. □

補題 2.3 を利用して, 次の定理を証明する.

定理 2.4. Ω を区分的 C^1 級の境界を持つ $\mathbb{R}^2$ 上の有界領域とする. また, 関数 K を type change function とする. このとき, 各 $f \in H^{-1}(\Omega;K)$ に対して, 次を満たす関数 $u \in L^2(\Omega)$ が存在する. $L\varphi \in L^2(\Omega)$ なる任意の $\varphi \in H^1_0(\Omega;K)$ に対し,

$$(u, L\varphi)_{L^2(\Omega)} = \langle g, \varphi \rangle \tag{2.2}$$

が成り立つ.

定義 2. 方程式 (2.2) を満たす $u \in L^2(\Omega)$ を境界値問題 (2.1) の超関数解と呼ぶ.

定理 *2.4* の証明. $f \in H^{-1}(\Omega;K)$ とし, $C_0^\infty(\Omega)$ 上の線型汎関数 J_f を, 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して

$$J_f(L\varphi) := \langle f, \varphi \rangle$$

で定義する. 一般化された Schwarz の不等式から,

$$|J_f(L\varphi)| \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega;K)} \|\varphi\|_{H^1_0(\Omega;K)}$$

が成り立つ. よって, 補題 2.3 と合わせて,

$$|J_f(L\varphi)| \leq C_1 \|f\|_{H^{-1}(\Omega;K)} \|L\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

を得る. この評価から, J_f は V 上有界であることが分かる. ただし,

$$V := \{u \in L^2(\Omega) \mid \text{ある } \varphi \text{ が存在して, } u = L\varphi\}$$

である. Hahn-Banach の定理より, J_f は $\overline{V} \subset L^2(\Omega)$ まで拡張できる. さらに $\overline{V}^\perp$ 上では 0 と定めることにより, J_f を $L^2(\Omega)$ 上の有界線型汎関数にまで拡張する.

ここで, Riesz の表現定理から, ある $u \in L^2(\Omega)$ が存在して, 任意の $\Phi \in L^2(\Omega)$ に対して

$$(u, \Phi)_{L^2(\Omega)} = J_f(\Phi)$$

が成り立つ. 特に, $\Phi \in V$ と取れば, ある $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ が存在して $\Phi = L\varphi$ と書け,

$$(u, L\varphi)_{L^2(\Omega)} = J_f(L\varphi) = \langle f, \varphi \rangle$$

が成り立つ. $C_0^\infty(\Omega)$ が $H^1_0(\Omega;K)$ で稠密であることを用いて, 結論を得る. □

3 Dirichlet 問題の強解

超関数解に対して, 強解を導入する.

定義 3. $u \in H_0^1(\Omega)$ が境界値問題 (2.1) の強解であるとは, ある関数列 $\{u_n\} \subset C_0^2(\Omega)$ が存在して, $n \to \infty$ のとき,

$$\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega;K)} \to 0,$$
$$\|Lu_n - f\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

となることである.

定理 3.1. Ω を区分的 C^1 級の境界を持つ $\mathbb{R}^2$ 上の有界領域とする. また, 関数 K を type change function とする. このとき, 境界値問題 (2.1) の強解は存在すれば一意である.

証明. 境界値問題 (2.1) に対して, 2 つの強解 u_1, u_2 が存在したと仮定する. 定義より, ある関数列 $\{u_i^{(n)}\} \subset C_0^2(\Omega)$, $i = 1, 2$ が存在して, $n \to \infty$ のとき

$$\|u_i^{(n)} - u\|_{H_0^1(\Omega;K)} \to 0,$$
$$\|Lu_i^{(n)} - f\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

が成り立つ.

これを踏まえて,

$$\|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega;K)} \le \|u_1 - u_1^{(n)}\|_{H_0^1(\Omega;K)} + \|u_1^{(n)} - u_2^{(n)}\|_{H_0^1(\Omega;K)} + \|u_2 - u_2^{(n)}\|_{H_0^1(\Omega;K)}$$

と分解する. 補題 2.3 より, 右辺第 2 項は

$$\begin{aligned}\|u_1^{(n)} - u_2^{(n)}\|_{H_0^1(\Omega;K)} \le& C_1\|L(u_1^{(n)} - u_2^{(n)})\|_{L^2(\Omega)} \\ \le& C_1(\|Lu_1^{(n)} - f\|_{L^2(\Omega)} + \|Lu_2^{(n)} - f\|_{L^2(\Omega)})\end{aligned}$$

と評価される.

よって,

$$\begin{aligned}\|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega;K)} \le& \|u_1 - u_1^{(n)}\|_{H_0^1(\Omega;K)} + \|u_2 - u_2^{(n)}\|_{H_0^1(\Omega;K)} \\ &+ C_1(\|Lu_1^{(n)} - f\|_{L^2(\Omega)} + \|Lu_2^{(n)} - f\|_{L^2(\Omega)})\end{aligned}$$

が成り立つ. 右辺は $n \to \infty$ で 0 になるから, $\|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega;K)} = 0$, すなわち $u_1 = u_2$ を得る. □

注意 3. 非斉次項 f が $L^2(\Omega)$ に属する場合でも, 一般には超関数解が強解になるとは限らない.

例 1. Ω を $\mathbb{R}^2$ の領域とし, Ω は原点 O を含んでいるとする. このとき, 次の関数を考える.

$$u(x,y) = \psi(x,y)E(x,y) = \begin{cases} C_-|9x^2 + 4y^3|^{5/6}, & (x,y) \in \Omega \cap D_-(0), \\ 0, & (x,y) \in \Omega \backslash D_-(0). \end{cases}$$

ただし,

$$\begin{aligned}\psi(x,y) :=& 9x^2+4y^3,\\ D_-(0) :=& \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 9x^2+4y^3<0\},\\ C_- :=& \frac{3\Gamma(4/3)}{2^{2/3}\pi^{1/2}\Gamma(5/6)}\end{aligned}$$

である.
　関数 f を

$$f(x,y) := -12yE\left(\frac{7}{2}E+3xE_x+2yE_y\right)$$

で定める. このとき, 上で定義した関数 u は方程式 $Tu := yu_{xx}+u_{yy} = f$ の超関数解となる.
　しかしながら, f は $L^2(\Omega)$ に属さず, さらに u は $\partial\Omega\cap D_-(0)$ 上で 0 にならないため, u は強解にならない.
　また, $Tv=0$ を満たす任意の滑らかな関数を 1 つ持ってくれば, $u+v$ もまた超関数解になることが分かる. このことから, 一般に超関数解は一意でない.

参考文献

[1] D. Lupo, C. S. Morawetz and K. R. Payne, On closed boundary value problems for equations of mixed elliptic–hyperbolic type, Comm. Pure Appl. Math., 60, (2007), pp. 1319—1348.

[2] C. S. Morawetz, The Dirichlet problem for the Tricomi equation, Comm. Pure Appl. Math., 23, (1970), pp. 587–601.

[3] M. Pilant, The Neumann problem for an equation of Lavrent'ev-Bitsadze type, J. Math. Anal. Appl., 106(2), (1985), pp. 321—359.