Tricomi 問題に対する最大値原理と一意性定理

Daisuke Kawagoe

2021 年 5 月 2 日

一般化 Tricomi 方程式
$$L[U] := K(y)U_{xx} + U_{yy} = 0 \tag{0.1}$$
を満たす関数 U に対する最大値原理と, それに付随する解の一意性について議論する. ただし, 係数 $K(y)$ は
$$\operatorname{sgn} K(y) = \operatorname{sgn} y, \quad K'(y) > 0 \tag{0.2}$$
を満たすとする.

(一般化) Tricomi 方程式を考える領域の双曲部の境界が方程式の 2 つの特性曲線からなり, 片側の特性曲線上に Dirichlet 境界条件を与える問題を Tricomi 問題という. Tricomi 問題については, 次の最大値原理が成り立つ.

定理 0.1. Ω を $\mathbb{R}^2$ の領域で, 直線 $y = 0$ と共通部分を持ち, $y > 0$ では有界, $y < 0$ では境界が特性曲線と一致するとする. 今, $\partial\Omega$ と $y = 0$ の交点を左から A, B とし, 2 点 A, B を始点とする特性曲線の交点を C とする. このとき, Ω 内で $L[U] \geq 0$ ならば, 次が成り立つ. 「定数 M に対して $\partial\Omega \cap \{y \geq 0\}$ 上で $U \leq M$ かつ曲線 AC 上で $U = 0$ ならば, Ω 内で $U < M$ が成り立つ.」

定理 0.1 を証明するため, 補題を用意する.

補題 0.2 (Hopf の補題)**.** D_0 を $\mathbb{R}^2 \cap \{y > 0\}$ 内の開円板とし, $U \in C^2(D_0) \cap C^1(\overline{D_0})$ とする. U が境界 ∂D_0 上の点 (x_0, y_0) で最大値 M を取るとする. このとき, D_0 内で $L[U] \geq 0$ であれば,
$$\frac{\partial U}{\partial n}(x_0, y_0) < 0$$
である. ただし, n は ∂D_0 の内向き単位法線ベクトルである.

証明. 関数 U が (x_0, y_0) 以外の境界上の点で最大値 M を取る場合は, 点 (x_0, y_0) で D_0 に内接する開円板を取り直すことで, 関数 U は境界上では点 (x_0, y_0) でのみ最大値を取ると仮定して良い. また, 同様の操作により, 点 (x_0, y_0) が直線 $y = 0$ 上に無い場合は, ∂D_0 は $y = 0$ と交点を持たないと仮定して良い. 円板の中心を (x_1, y_1), 半径を r_1 とする. また, 中心が (x_0, y_0), 半径が $r_2 (< r_1)$ の開円板を D_1 とする. さらに, $D := D_0 \cap D_1$ とする.

ここで, 関数 H を
$$H(x, y) := e^{-ar^2} - e^{-ar_1^2}, \quad r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

で定義する．ただし, a は正の定数である．関数 H は $\partial D\cap\partial D_0$ 上で $H=0$, $\partial D\cap\partial D_1$ 上で $0\le H\le 1$ を満たす．さらに,

$$e^{ar^2}L[H]=4a^2\left((y-y_1)^2+K(y)(x-x_1)^2\right)-2a(1+K(y))$$

である．

D_0, D_1 の定義より, ある正の定数 δ が存在して, D 内では $r^2>\delta^2>0$ となる．さらに, $y_0>0$ の場合は, ある正の定数 δ_1, δ_2 が存在して, D 内では $\delta_1<y<\delta_2$ となる．このとき, 定数 a を

$$2a\delta^2\min\{1,K(\delta_1)\}>1+K(\delta_2)$$

が成り立つように取れば, $L[H]>0$ とできる．$y_0=0$ の場合は, D 内で $y_1-y>\delta$ であるから, 定数 a を

$$2a\delta^2>1+K(\delta_2)$$

が成り立つように取れば, $L[H]>0$ となる．

先述のとおり十分大きな定数 a を取り, 関数

$$w:=U+\epsilon H$$

を導入する．十分小さな正の定数 ϵ に対しては (x_0,y_0) を除く ∂D 上の各点で $w<M$ となる．D 内で $L[w]>0$ であるので, 関数 w は $\overline{D}$ の内点では最大値を取れない．したがって, $\overline{D}$ 上で $w\le M$ であり, 等号は点 (x_0,y_0) 上に限る．特に, w は点 (x_0,y_0) から内側へ向かっては増加できないので,

$$\frac{\partial w}{\partial n}(x_0,y_0)\le 0$$

である．

$$\frac{\partial H}{\partial n}(x_0,y_0)=2ar_1e^{-ar_1^2}>0$$

であるから,

$$\frac{\partial U}{\partial n}(x_0,y_0)=\frac{\partial w}{\partial n}(x_0,y_0)-\epsilon\frac{\partial H}{\partial n}(x_0,y_0)<0$$

となり, 結論を得る． □

補題 0.3. Ω^+ を $\mathbb{R}^2\cap\{y>0\}$ の領域とする．関数 U が Ω^+ 内で $L[U]\ge 0$ を満たすならば, U は Ω^+ 上定数であるか, $\overline{\Omega^+}$ 上での最大値を境界 $\partial\Omega^+$ 上でのみ達成する．さらに, 関数 U が最大値を達成する点 $(x_0,y_0)\in\partial\Omega^+$ の近傍で $\partial\Omega^+$ が滑らかであれば,

$$\frac{\partial U}{\partial n}(x_0,y_0)<0$$

である．

証明. 関数 U が $\overline{\Omega^+}$ の内点 P で最大値 M を達成し, 内点 Q では $U(Q)<M$ となると仮定する．U の連続性から, ある点 P' が線分 PQ 上に存在して, $U(P')=M$, 線分 $P'Q$ 上の任意の点 R に対して $U(R)<M$ が成り立つ．

$d:=\mathrm{dist}(\partial\Omega^+,P'Q)$ とし, 線分 $P'Q$ 上の点 P_0 を $|P_0P'|<d/2$ となるようにとる．この点 P_0 を中心とする円板 D で, Ω^+ に含まれ, かつ D 内で $U<M$ が成り立つもののうち,

半径が最大のものを D_0 とする. 定義より, 関数 U は ∂D_0 上の少なくとも一点 (x_0, y_0) 上で最大値 M をとる. しかし,

$$\frac{\partial U}{\partial n}(x_0, y_0) = 0$$

となるため, 補題 0.2 に矛盾する. したがって, U は Ω^+ 上定数であるか, $\overline{\Omega^+}$ 上での最大値を境界 $\partial\Omega^+$ 上でのみ達成する.

今, 関数 U が $\partial\Omega^+$ 上の点 P_1 で最大値を取ったとする. 点 P_1 で $\partial\Omega^+$ に内接する開円板 D_1 を考え, D_1 に対して補題 0.2 を適用することにより,

$$\frac{\partial U}{\partial n}(P_1) < 0$$

を得る. □

補題 0.4 (Agmon, Nirenberg and Protter, 1953 [1])**.** 点 A, B, C を定理 0.1 のように取り, 線分 AB, 特性曲線 AC, BC で囲われた領域を $\triangle ABC$ と表す. 今, 関数 U が $\triangle ABC$ 内で $L[U] = 0$ であり, 曲線 AC 上で $U = 0$ とする. このとき, 係数 $K(y)$ が

$$\frac{K''(y)}{K(y)} - \frac{5}{4}\left(\frac{K'(y)}{K(y)}\right)^2 < 0 \tag{0.3}$$

を満たすならば, $\triangle ABC$ で

$$U < \max_{x \in AB} U(x, 0)$$

が成り立つ.

証明. 方程式 (0.1) に対する特性曲線の方程式は

$$\begin{cases} \alpha := x - \int_0^y \sqrt{-K(y')}\, dy', \\ \beta := x + \int_0^y \sqrt{-K(y')}\, dy' \end{cases}$$

である. このとき, 方程式 (0.1) は変数 α, β を用いて

$$hU_{\alpha\beta} + h_\alpha U_\beta + h_\beta U_\alpha = 0, \quad h = (-K(y))^{1/4} \tag{0.4}$$

と書ける.

点 $P_1(\alpha_1, \beta_1)$ を曲線 AC 上の点とし, $\triangle ABC$ の内部または曲線 BC 上に点 $P(\alpha_1, \beta)$ を取る. 方程式 (0.4) を線分 PP_1 に沿って積分することで,

$$[hU_\alpha]_P^{P_1} + \int_P^{P_1} h_\alpha U_\beta \, d\beta = 0$$

を得る. 仮定より $U(P_1) = U_\alpha(P_1) = 0$ であることに注意して上式に部分積分を施すと,

$$-h(P)U_\alpha(P) - [h_\alpha(U(P) - U)]_P^{P_1} + \int_P^{P_1} h_{\alpha\beta}(U(P) - U)\, d\beta = 0,$$

即ち,

$$h(P)U_\alpha(P) = -h_\alpha(P_1)U(P) + \int_P^{P_1} h_{\alpha\beta}(U(P) - U)\, d\beta \tag{0.5}$$

となる.

等式 0.5 の両辺の符号について議論する.

$$\int_0^y \sqrt{-K(y')}\,dy' = \frac{\beta-\alpha}{2}$$

であるから,

$$y_\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{-K(y)}} = -\frac{1}{2}h^{-2}, \quad h_\alpha = h' y_\alpha = \frac{1}{8}K'(y)(-K(y))^{-5/4} > 0. \tag{0.6}$$

同様に,

$$y_\beta = \frac{1}{2\sqrt{-K(y)}} = \frac{1}{2}h^{-2}$$

であるから,

$$h_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial y}(h_\alpha)y_\beta = -\frac{1}{16}(-K(y))^{-3/4}\left\{\frac{K''(y)}{K(y)} - \frac{5}{4}\left(\frac{K'(y)}{K(y)}\right)^2\right\}.$$

(0.3) より, $h_{\alpha\beta} > 0$ である.

等式 (0.5) において, 関数 U が点 P で最大値をとると仮定する. AC 上で $U=0$ であるから, $U(P) > 0$ としてよい. このとき, (0.6) より右辺第 1 項は負であり. また, $h_{\alpha\beta} > 0$ より右辺第 2 項の被積分関数は正となるが, $\beta_1 < \beta$ より積分値は負となる. したがって, (0.5) の右辺は負である. これより $U_\alpha(P) < 0$ となるが, これは U が P で最大値をとることに矛盾する. 以上により, 結論を得る. □

以上の準備下で, 定理 0.1 を証明する.

定理 0.1 の証明. M を $\partial\Omega \cap \{y \geq 0\}$ における U の最大値, $M' := \max_{x\in AB} U(x,0)$ とする. 補題 0.3 より, $\Omega^+ := \Omega \cap \{y > 0\}$ において $U < \max(M, M')$ となる. また, 補題 0.4 より, 領域 $\triangle ABC := \Omega \cap \{y < 0\}$ では $U < M'$ が成立する. 以上から, $M' < M$ が成立することを証明すれば良い.

そこで, $M' > M$ と仮定する. このとき, U は点 $(x_0, 0)$ で最大値を取ることになる. ところが, これは補題 0.2 による

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x_0, 0) \neq 0$$

と矛盾する. したがって, 結論を得る. □

定理 0.1 において $M = 0$ ならば, $U \leq 0$ である. 同様に, 定理 0.1 を $-U$ に適用すれば, $U \geq 0$ となる. これらを合わせて, 次の命題を得る.

定理 0.5 (Tricomi 問題 の (古典) 解の一意性)**.** Ω を $\mathbb{R}^2$ の領域で, 直線 $y=0$ と共通部分を持ち, $y>0$ では有界, $y<0$ では境界が特性曲線と一致するとする. 今, $\partial\Omega$ と $y=0$ の交点を左から A, B とし, 2 点 A, B を始点とする特性曲線の交点を C とする. また, f を $\partial\Omega \cap \{y \geq 0\}$ 上の連続関数, g を曲線 AC 上の連続関数とする. このとき, Ω 内で $L[U] = 0$, $\partial\Omega \cap \{y \geq 0\}$ 上で $U = f$ かつ曲線 AC 上で $U = g$ を満たす関数 $U \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ は, 存在すれば一意である.

参考文献

[1] S. Agmon, L. Nirenberg and M. H. Protter, A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type, Comm. Pure Appl. Math., 6, (1953), pp. 455–470.

[2] A. R. Manwell, *The Tricomi equation with applications to the theory of plane transonic flow*, Research Notes in Mathematics, No 35, Pitman Advanced Publishing Program, San Francisco, London, Melbourne (1979).