一般化 Tricomi 問題の最大値原理と一意性定理

Daisuke Kawagoe

2021 年 5 月 3 日

1　最大値原理と一意性定理

一般化 Tricomi 方程式

$$\tilde{L}[U] := K(y)U_{xx} + U_{yy} = 0 \tag{1.1}$$

を満たす関数 U に対する最大値原理と, それに付随する解の一意性について議論する. ただし, 係数 $K(y)$ は

$$\operatorname{sgn} K(y) = \operatorname{sgn} y, \quad K'(y) > 0 \tag{1.2}$$

を満たすとする.

(一般化) Tricomi 方程式を考える領域の双曲部の境界が方程式の 2 つの特性曲線からなり, 片側の特性曲線上に Dirichlet 境界条件を与える問題を Tricomi 問題と呼んだ. これに対し, 2 つの特性曲線のうち Dirichlet 境界条件を課していないほうの境界を任意の曲線に取り換えた境界値問題のことを一般化 Tricomi 問題と呼ぶ. 一般化 Tricomi 問題については, 次の最大値原理が成り立つ.

定理 1.1 (Morawetz, 1964)**.** Ω を $\mathbb{R}^2$ の領域で, 直線 $y = 0$ と共通部分を持つものとし, 境界 $\partial\Omega$ は次の条件 (1.3) を満たすとする.

$$\begin{cases} y > 0 : \operatorname{sgn}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \operatorname{sgn} x, \\ y < 0 : dx^2 + K(y)\, dy^2 > 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

関数 U が Ω 内で $\tilde{L}(U) = 0$ を満たし, U の共役関数 V が $\partial\Omega$ 上で

$$dV := U_y\, dx - K(y)U_x\, dy = 0 \tag{1.4}$$

を満たせば, U は Ω 内で定数である.

以下の議論では, 次の補題を用いる.

補題 1.2. Ω^+ を $\mathbb{R}^2 \cap \{y > 0\}$ の領域とする. 関数 U が Ω^+ 内で $L[U] \geq 0$ を満たすならば, U は Ω^+ 上定数であるか, $\overline{\Omega^+}$ 上での最大値を境界 $\partial\Omega^+$ 上でのみ達成する. さらに, 関数 U が最大値を達成する点 $(x_0, y_0) \in \partial\Omega^+$ の近傍で $\partial\Omega^+$ が滑らかであれば,

$$\frac{\partial U}{\partial n}(x_0, y_0) < 0$$

である.

定理 1.1 の証明のため, 補助関数 W を次のとおり定義する. 一般化 Tricomi 方程式の解 U に対して,

$$W(x,y) := \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (K(y)U_x(x,y)^2 - U_y(x,y)^2)\,dy - 2U_x(x,y)U_y(x,y)\,dx. \tag{1.5}$$

ただし, (x_0,y_0) は Ω 内の点であり, 積分は 2 点 (x_0,y_0), (x,y) を結ぶ曲線に沿って行う.

上の積分が経路に依らないことを確認する. 点 (x_0,y_0) を通る Ω 内の単純閉曲線 C を考える. C で囲まれた領域 S に対して Stokes の定理を適用すると,

$$\begin{aligned}
&\int_C (K(y)U_x(x,y)^2 - U_y(x,y)^2)\,dy - 2U_x(x,y)U_y(x,y)\,dx \\
=&\int_S (K(y)U_x(x,y)^2 - U_y(x,y)^2)_x + (2U_x(x,y)U_y(x,y))_y\,dxdy \\
=&\int_S 2K(y)U_x(x,y)U_{xx}(x,y) + 2U_x(x,y)U_{yy}(x,y)\,dxdy \\
=&\int_S 2U_x(x,y)\tilde{L}[U](x,y)\,dxdy
\end{aligned}$$

となる. 関数 U は一般化 Tricomi 方程式の解であったから,

$$\int_C (K(y)U_x(x,y)^2 - U_y(x,y)^2)\,dy - 2U_x(x,y)U_y(x,y)\,dx = 0$$

となり, W を定義する積分が経路に依らないことが分かった.

補助関数 W に対して, 次の補題が成立する.

補題 1.3. $\partial\Omega$ と直線 $y = 0$ との交点を A, B とする. このとき, W の値は $M := \max\{V(A), V(B)\}$ を超えない. ただし, V は U の共役関数であり, Ω 内で次を満たす.

$$\begin{cases} V_x = U_y, \\ V_y = -K(y)U_x. \end{cases}$$

証明.

$$W(x,y) = \int_{y_0}^{y} (K(y)U_x(x_0,y)^2 - U_y(x_0,y)^2)\,dy - \int_{x_0}^{x} 2U_x(x,y)U_y(x,y)\,dx$$

と積分経路を取ると, $W_x(x,y) = -2U_x(x,y)U_y(x,y)$ であることが分かる. 同様に,

$$W(x,y) = -\int_{x_0}^{x} 2U_x(x,y_0)U_y(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} (K(y)U_x(x,y)^2 - U_y(x,y)^2)\,dy$$

と積分経路を取ることで, $W_y(x,y) = K(y)U_x(x,y)^2 - U_y(x,y)^2$ となる. さらに偏微分を施して,

$$\begin{aligned}
W_{xx}(x,y) =& -2U_{xx}(x,y)U_y(x,y) - 2U_x(x,y)U_{xy}(x,y), \\
W_{yy}(x,y) =& K'(y)U_x(x,y)^2 + 2K(y)U_x(x,y)U_{xy}(x,y) - 2U_y(x,y)U_{yy}(x,y)
\end{aligned}$$

を得る. 以上より,

$$\tilde{L}[W](x,y) = K'(y)U_x(x,y)^2 + \tilde{L}[U](x,y) = K'(y)U_x(x,y)^2 \geq 0$$

である. 補題 1.2 より, W は Ω^+ で最大値原理を満たす.

境界条件 (1.4) より, $\partial\Omega$ 上では

$$U_y = K(y)U_x \frac{dy}{dx}$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned}\left(\frac{dW}{dy}\right)_{\partial\Omega} =& KU_x^2 - \left(KU_x\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2U_xKU_x\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy} \\ =& -KU_x^2\left(1 + K\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\end{aligned}$$

となる. 特に $\partial\Omega^+$ 上では $\operatorname{sgn} K > 0$ より

$$\left(\frac{dW}{dy}\right)_{\partial\Omega^+} \leq 0$$

である. また, $\partial\Omega^- := \partial(\Omega \cap \{y < 0\})$ 上では, 境界条件 (1.3) より

$$dx^2 + K\,dy^2 > 0 \iff 1 + K\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 > 0$$

であるから,

$$\left(\frac{dW}{dy}\right)_{\partial\Omega^-} \geq 0 \tag{1.6}$$

である. いずれの場合も, A または B から $\partial\Omega$ に沿って移動する際, W は増加しないことを意味する.

Ω^- の内部においては, $y < 0$ における任意の特性曲線に沿って,

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dy} =& W_y + W_x\frac{dx}{dy} \\ =& KU_x^2 - U_y^2 - 2U_xU_y\left(\pm|K|^{1/2}\right) = -\left(U_y \pm |K|^{1/2}U_x\right)^2 = -\left(\frac{dU}{dy}\right)^2 \leq 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

である.

$\overline{\Omega^-}$ 内の点 P を取る. 点 P が $\partial\Omega$ 上に無ければ, Ω 内を通る特性曲線で点 P と $\partial\Omega$ 上の点 Q とを結ぶ. (1.6), (1.7) より, $W(P) \leq W(Q) \leq \max\{W(A), W(B)\}$ である. 点 P が $\partial\Omega^-$ 上にある時は, 点 Q を点 P とすることで, 同様に $W(P) \leq \max\{W(A), W(B)\}$ を得る. 特に $P \in AB$ と取れば, Ω^+ における W の最大値原理から補題が従う. □

定理 1.1 の証明. δ を正の定数とし, Ω 内の帯状領域 $D := \Omega \cap \{0 < y < \delta\}$ を考える. また, $\partial\Omega$ と $y = \delta$ との交点をそれぞれ A', B' とし, A と A', B と B' がそれぞれ $\partial\Omega$ で結ばれているものとする.

D 上の関数 W_1 を

$$W_1 := W + \epsilon y$$

で定義する．ただし, ϵ は正の定数である．$\tilde{L}[W_1] = \tilde{L}[W] \geq 0$ であるから, 補題 1.2 が W_1 に対しても適用できる．また補題 1.3 から, 辺 AB 上では $W_1 = W \leq M$ が成り立つ．さらに, 補題 1.3 の証明から, 次のどちらかが成り立つ．(1) 弧 AA' または 弧 BB' の少なくとも一方で, 恒等的に $U_x = U_y = 0$, (2) 弧 AA' および 弧 BB' 上で $(\frac{dW}{dy})_{\partial\Omega^+} < 0$.

(2) の場合が成立すると仮定する．この時,

$$\left(\frac{dW_1}{dy}\right)_{\partial\Omega^+} = \left(\frac{dW}{dy}\right)_{\partial\Omega^+} + \epsilon$$

であるから, ϵ を十分小さく取れば, $(\frac{dW_1}{dy})_{\partial\Omega^+} < 0$ とできる．よって, $W_1(A') < M, W_1(B') < M$ が成り立つ．さらに, 補題 1.3 より, 辺 $A'B'$ の内点でも $W < M$ となるので, 十分小さい $\epsilon > 0$ に対しては W_1 が 弧 AA' または弧 BB' 上で最大値を取る．ところが, 境界条件 (1.4) より

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial y}\right)_{\partial\Omega^+} = \epsilon + K(y)U_x^2 - U_y^2 = \epsilon + K(y)U_x^2\left(1 - K(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) \geq \epsilon$$

であり, (1.3) からこれは W が $\partial\Omega$ 上で最大値を取ることに矛盾する．したがって, (2) の場合は起こり得ない.

そこで, (1) の場合を検討する．この時, D 内における (楕円型) 方程式の境界値問題に対する解の一意性から, D 内で U が定数であることが分かる．U は Ω^+ 上で $\tilde{L}[U] = 0$ を満たすから, 一意接続定理から結局 U は Ω^+ 上定数となる．Ω^- 上でも U が定数になることは, 後の定理 2.2 から従う． □

2 a-b-c 法

a-b-c 法について概説する.

Ω を $\mathbb{R}^2$ の mixed region とし, U を Ω 内で $\tilde{L}[U] = 0$ を満たす C^2 級関数であるとする．D を Ω 内の (求長可能な) 単純閉曲線 C で囲まれた領域とし, 次の恒等式を考える.

$$\int_D (aU + bU_x + cU_y)\tilde{L}[U]\, dxdy = 0. \tag{2.1}$$

ただし, a, b, c は C^1 級の実数値関数である.

恒等式 (2.1) に対して, 次が成り立つ.

命題 2.1. $a = 0$ とする．このとき,

$$\begin{aligned}
&2\int_D (bU_x + cU_y)\tilde{L}[U]\, dxdy \\
=&\int_D (U_x^2(-Kb_x + (cK)_y) - 2U_xU_y(b_y + Kc_x) + U_y^2(b_x - c_y))\, dxdy \\
&+\int_C L\, dy + M\, dx.
\end{aligned}$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
L :=& b(KU_x^2 - U_y^2) + 2cKU_xU_y,\\
M :=& c(KU_x^2 - U_y^2) - 2bU_xU_y.
\end{aligned}
$$

証明. Green の公式より,

$$\int_D bKU_xU_{xx}\,dxdy = \int_C bKU_x^2\,dy - \int_D b_xKU_x^2\,dxdy - \int_D bKU_{xx}U_x\,dxdy.$$

よって,

$$2\int_D bKU_xU_{xx}\,dxdy = \int_C bKU_x^2\,dy - \int_D b_xKU_x^2\,dxdy.$$

同様に,

$$
\begin{aligned}
2\int_D bU_xU_{yy}\,dxdy =& -2\int_C bU_xU_y\,dx - 2\int_C b_yU_xU_y\,dxdy\\
& - \int_C bU_y^2\,dx + \int_D b_xU_y^2\,dxdy,\\
2\int_D cKU_yU_{xx}\,dxdy =& 2\int_C cKU_xU_y\,dy - 2\int_C c_xKU_xU_y\,dxdy\\
& + \int_C cKU_x^2\,dx + \int_D (cK)_yU_x^2\,dxdy,\\
2\int_D cU_yU_{yy}\,dxdy =& -\int_C cU_y^2\,dx - \int_D c_yU_y^2\,dxdy.
\end{aligned}
$$

辺々を足し合わせて, 結論を得る. □

命題 2.1 の導出に際し, $U \in C^2(\Omega)$ を仮定したが, U の偏導関数は境界 $\partial\Omega$ の近くで特異性を持ちうる. 以降では, 命題 2.1 の右辺に現れる積分が定義できる程度の特異性は許容しているものとする.

定理 2.2. 境界 $\partial\Omega$ と $y = 0$ の交点を左から A, B とし, 2 点 A, B を始点とする特性曲線の交点を C とする. 関数 U が $\triangle ABC$ 内で $\tilde{L}[U] = 0$ を満たし, かつ次の条件のうち一方を満たすと仮定する.

1. 「AC 上で $U = 0$」 かつ 「AB 上で $U = 0$ または $U_y = 0$.」
2. AB 上で $U = U_y = 0$.

このとき, $\triangle ABC$ 内で $U = 0$.

証明. 命題 2.1 において, $b = 1$, $c = 0$ とすると,

$$\int_C (KU_x^2 - U_y^2)\,dy - 2U_xU_y\,dx = 0.$$

曲線 AC 上に点 P を取り, 点 P を通る特性曲線と辺 AB との交点のうち, 点 A でないものを点 P' とする. このとき, 曲線 AP 上では

$$\frac{dx}{dy} = -\sqrt{-K(y)},$$

$$\left(\frac{dU}{dy}\right) =(U_y - \sqrt{-K(y)}U_x)^2 = U_y^2 - 2\sqrt{-K(y)}U_xU_y - K(y)U_x^2$$

である. また, 曲線 PP' 上では

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &=\sqrt{-K(y)},\\ \left(\frac{dU}{dy}\right) &=(U_y + \sqrt{-K(y)}U_x)^2 = U_y^2 + 2\sqrt{-K(y)}U_xU_y - K(y)U_x^2\end{aligned}$$

である.

命題 2.1 の単純閉曲線 C として, $AP \cup PP' \cup P'A$ を考える.

$$\begin{aligned}\int_C (KU_x^2 - U_y^2)\,dy - 2U_xU_y\,dx =& -\int_{AP}\left(U_y^2 + 2U_xU_y\frac{dx}{dy} - KU_x^2\right)dy\\ &-\int_{PP'}\left(U_y^2 + 2U_xU_y\frac{dx}{dy} - KU_x^2\right)dy\\ &+2\int_{AP'} U_xU_y\,dx\\ =& -\int_{AP\cup PP'}\left(\frac{dU}{dy}\right)^2 dy + 2\int_{AP'} U_xU_y\,dx = 0.\end{aligned}$$

仮定 1. が成り立つ場合,

$$\int_{AP}\left(\frac{dU}{dy}\right)^2 dy = \int_{AP'} U_xU_y\,dx = 0$$

であるから,

$$\int_{PP'}\left(\frac{dU}{dy}\right)^2 dy = 0.$$

よって, U は曲線 PP' 上定数であり, 特に $U(P) = 0$ であるから, 曲線 PP' 上 $U = 0$ となる. 点 P の取り方は任意であり, $\triangle ABC$ は上の曲線による族 $\{PP' \mid P \in AC\}$ により埋め尽くされるので, 結論が従う.

次に, 命題 2.1 において, $b = 0$, $c = K^{-1}$ とする. このとき,

$$\int_D \frac{K'(y)}{K(y)^2}U_y^2\,dxdy + \int_C 2U_xU_y\,dy + \int_C (U_x^2 - K^{-1}U_y^2)\,dx = 0.$$

辺 AB 上に点 P を取り, 点 P を通る特性曲線と曲線 AC との交点を P'' とする. また, 正の定数 δ に対し, 曲線 AC, PP'' と直線 $y = -\delta$ との交点をそれぞれ A', P' とする. 今, 単純閉曲線 C として, $A'P'' \cup P''P' \cup P'A'$ を考える.

$$\int_C 2U_xU_y\,dy + \int_C (U_x^2 - K^{-1}U_y^2)\,dx = \int_{A'P''\cup P''P'}\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 dx + \int_{P'A'} (U_x^2 - K^{-1}U_y^2)\,dx.$$

仮定 2. の下で $\delta \to 0$ とすると, $U_y = O(\delta)$ であるから,

$$\int_{P'A'} (U_x^2 - K^{-1}U_y^2)\,dx \to \int_{PA} (U_x^2 - K^{-1}U_y^2)\,dx = 0.$$

よって, $\delta \to 0$ で

$$\int_D \frac{K'(y)}{K(y)^2} U_y^2 \, dxdy + \int_{A'P'' \cup P''A'} \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 dx = -\int_{P'A'} (U_x^2 - K^{-1} U_y^2) \, dx \to 0.$$

K に対する仮定より左辺第一項は非負であるから, 曲線 $AP'' \cup P''P$ 上で U は一定であり, 特に $U(A) = 0$ であるから, 曲線 $AP'' \cup P''P$ 上で $U = 0$ が成り立つ. 点 P の取り方は任意であり, $\triangle ABC$ は上の曲線による族 $\{PP'' \mid P \in AB\}$ により埋め尽くされるので, 結論を得る. □

定理 2.3. 境界 $\partial\Omega$ と $y = 0$ の交点を左から A, B とし, 2 点 A, B を始点とする特性曲線の交点を C とする. 今, 辺 AB 上に点 O を取り, 点 O を通る特性曲線と曲線 AB, AC の交点をそれぞれ点 D, E とする. このとき, 関数 U が $ODCE$ 内で $\tilde{L}[U] = 0$ を満たし, $OD \cup OE$ 上で $U = 0$ であれば, $ODCE$ 内で $U = 0$ である.

証明. 曲線 OD, OE 上にそれぞれ点 P_1, P_2 を取り, 点 P_1 を通る特性曲線と点 P_2 を通る特性曲線のうち点 O でないものを点 Q とする.

命題 2.1 において $b = 0$, $c = K^{-1}$ として,

$$\int_D \frac{K'(y)}{K(y)^2} U_y^2 \, dxdy + \int_C 2U_x U_y \, dy + \int_C (U_x^2 - K^{-1} U_y^2) \, dx = 0.$$

単純閉曲線 C として $OP_1 \cup P_1Q \cup QP_2 \cup P_2O$ を取れば, 仮定より

$$\int_D \frac{K'(y)}{K(y)^2} U_y^2 \, dxdy + \int_{P_1Q \cup QP_2} \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 dx = -\int_{OP_1 \cup P_2O} \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 dx = 0.$$

よって, U は曲線 $P_1Q \cup QP_2$ 上一定であり, 特に $U(P_1) = U(P_2) = 0$ より曲線 $P_1Q \cup QP_2$ 上 $U = 0$. 点 P_1, P_2 の取り方は任意であり, 領域 $ODCE$ は曲線 $P_1Q \cup QP_2$ で埋め尽くされるから, 結論を得る. □

参考文献

[1] S. Agmon, L. Nirenberg and M. H. Protter, A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic–hyperbolic type, Comm. Pure Appl. Math., 6, (1953), pp. 455–470.

[2] A. R. Manwell, *The Tricomi equation with applications to the theory of plane transonic flow*, Research Notes in Mathematics, No 35, Pitman Advanced Publishing Program, San Francisco, London, Melbourne (1979).

[3] C. S. Morawetz, Non-existence of transonic flow past a profile, Comm. Pure Appl. Math., 17, (1964), pp. 357–367.