一般化 Tricomi 方程式の閉 Dirichlet 問題の弱解について

Daisuke Kawagoe

2021 年 5 月 5 日

1　閉境界値問題

次の境界値問題を考える.

$$Lu := K(y)u_{xx} + u_{yy} = f \text{ in } \Omega, \tag{1.1}$$

$$Bu = g \text{ on } \partial\Omega. \tag{1.2}$$

ただし, 係数 K は $\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数で, $K(0) = 0$ かつ $y \neq 0$ で $yK(y) > 0$ を満たす. また, f, g は与えられた関数で, B は適当な trace operator である. 領域 Ω は $\mathbb{R}^2$ の有界領域とし, 境界 $\partial\Omega$ は区分的に C^1 級であると仮定する. さらに, $\mathbb{R}_\pm := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \pm y > 0\}$ とし, 領域 Ω は $\Omega_\pm := \Omega \cap \mathbb{R}_\pm \neq \emptyset$ であると仮定する.

方程式 (1.1) を Tricomi 型の方程式, Chaplygin 方程式, または Frankl' 方程式と呼ぶ. また, 条件 (1.2) を閉境界条件と呼ぶ. 閉境界条件に対して, 境界の (真) 部分集合 Γ 上のみで与えられる境界条件のことを開境界条件と呼ぶ.

開境界値問題と比較して, 閉境界値問題 (1.1)-(1.2) はあまり研究が進んでおらず, 代表的な結果は 2 つしかない. 1 つは Morawetz (1970) [2] によるもので, $K(y) = y$ (Tricomi 方程式) の場合の Dirichlet 問題の適切性が議論された. もう 1 つは Pilant (1985) [3] によるもので, $K(y) = \mathrm{sgn}(y)$ (Lavrent'ev–Bitsadze 方程式) の場合の Neumann 問題の適切性が議論された.

2　Dirichlet 問題の弱解

閉境界値問題 (1.1)-(1.2) として, 次の Dirichlet 問題を考える.

$$\begin{cases} Lu := K(y)u_{xx} + u_{yy} = f & \text{in } \Omega, \\ Bu := u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Sobolev 空間 $H^1_0(\Omega; K)$ を導入する. 重み付き Sobolev ノルム $\|\cdot\|_{H^1(\Omega;K)}$ を

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega;K)} := \int_\Omega \left(|K(y)|u_x(x,y)^2 + u_y(x,y)^2 + u(x,y)^2\right) dxdy$$

で定義し, $H^1_0(\Omega; K)$ を $\|\cdot\|_{H^1(\Omega;K)}$ に関する $C^\infty_0(\Omega)$ の閉包として定義する.

このとき, $H^1_0(\Omega; K)$ おいて, Poincaré の不等式が成り立つ.

命題 2.1 (Poincaré の不等式)**.** ある定数 $C_P = C_P(\Omega; K)$ が存在し, すべての $u \in H_0^1(\Omega; K)$ に対して

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \le C_P \int_\Omega \left(|K(y)|u_x(x,y)^2 + u_y(x,y)^2\right) dxdy$$

が成り立つ.

注意 1. 実際には, より強い不等式が成り立つ. すなわち, ある定数 $C = C(\Omega)$ が存在して,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \le C \int_\Omega u_y(x,y)^2 \, dxdy$$

が成り立つ.

Poincaré の不等式から,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega;K)}^2 := \int_\Omega \left(|K(y)|u_x(x,y)^2 + u_y(x,y)^2\right) dxdy$$

も Sobolev 空間 $H_0^1(\Omega; K)$ のノルムとなる.

$H_0^1(\Omega; K)$ の双対空間を $H^{-1}(\Omega; K)$ と書く. $H^{-1}(\Omega; K)$ のノルム $\|\cdot\|_{H^{-1}(\Omega;K)}$ を

$$\|w\|_{H^{-1}(\Omega;K)} := \sup_{0 \ne \varphi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\langle w, \varphi \rangle}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega;K)}}$$

で定義する. ただし, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $H^{-1} - H^1$ dual pair を表す.

上の定義から, 次の不等式が直ちに従う.

命題 2.2 (一般化された Schwarz の不等式)**.** 任意の $w \in H^{-1}(\Omega; K)$ と任意の $\varphi \in H_0^1(\Omega; K)$ に対し,

$$|\langle w, \varphi \rangle| \le \|w\|_{H^{-1}(\Omega;K)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega;K)}$$

が成り立つ.

係数関数 K について, 次の条件を導入する.

定義 1. 関数 $K \in C^1(\mathbb{R})$ が type change function であるとは, K が次の 4 つの条件を満たすことである.

1. $K(0) = 0$,
2. $y \ne 0$ で $yK(y) > 0$,
3. $K'(y) > 0$,
4. ある正の定数 δ が存在して $1 + (2K/K')' \ge \delta$.

注意 2. $K(y) = y$ のとき,

- $K \in C^1(\mathbb{R})$,
- $K(0) = 0$,

- $y \neq 0$ のとき $yK(y) = y^2 > 0$,
- $K'(y) = 1 > 0$,
- $1 + (2K(y)/K'(y))' = 3 > 0$

である．よって, $K(y) = y$ は type change function である．

Dirichlet 問題 (2.1) の弱解は次のように定義される．

定義 2. K を type change function とする．$u \in H_0^1(\Omega; K)$ が Dirichlet 問題 (2.1) の弱解であるとは, ある関数列 $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ が存在して, $n \to \infty$ で

$$\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega;K)} \to 0, \quad \|Lu_n - f\|_{H^{-1}(\Omega;K)} \to 0 \tag{2.2}$$

が成り立つことである．

注意 3. 条件 (2.2) は以下と同値である．任意の $\varphi \in H_0^1(\Omega; K)$ に対して,

$$\langle Lu, \varphi \rangle = -\int_\Omega (Ku_x\varphi_x + u_y\varphi_y)\, dxdy = \langle f, \varphi \rangle \tag{2.3}$$

が成り立つ．

以下, 必要となる概念を導入する．

定義 3. K を type change function とする．関数空間 $L^2(\Omega; |K|)$ を

$$\begin{aligned} L^2(\Omega; |K|) :=& \{f \in L^2(\Omega) \mid \|f\|_{L^2(\Omega;|K|)} < \infty\}, \\ \|f\|_{L^2(\Omega;|K|)} :=& \left(\int_\Omega |K(y)| f(x,y)^2 \, dxdy \right) \end{aligned}$$

で定義する．また, 関数空間 $L^2(\Omega; |K|^{-1})$ を

$$\begin{aligned} L^2(\Omega; |K|^{-1}) :=& \{f \in L^2(\Omega) \mid \|f\|_{L^2(\Omega;|K|^{-1})} < \infty\}, \\ \|f\|_{L^2(\Omega;|K|^{-1})} :=& \left(\int_\Omega |K(y)|^{-1} f(x,y)^2 \, dxdy \right) \end{aligned}$$

で定義する．

注意 4. 次の包含関係が成り立つ．

$$L^2(\Omega; |K|^{-1}) \subset L^2(\Omega) \subset L^2(\Omega; |K|).$$

注意 5. $f \in L^2(\Omega; |K|), g \in L^2(\Omega; |K|^{-1})$ とすると, $|(f,g)_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega;|K|)}\|g\|_{L^2(\Omega;|K|^{-1})}$ が成り立つ．よって, 有界な双線型形式 $\langle g, f \rangle := (f,g)_{L^2(\Omega)}$ が定義され, この形式により $L^2(\Omega; |K|^{-1})$ は $L^2(\Omega; |K|)$ の双対空間となる．

領域 Ω に対して次を仮定する．$AB := \overline{\Omega} \cap \{y = 0\}$ とし, 必要なら平行移動することで $B = (0, 0)$ とする．

定義 4. $V(x,y)=(V_1(x,y),V_2(x,y))$ を $\overline{\Omega}$ 上の Lipschitz 連続なベクトル場とする. また, $(x_0,y_0)\in\overline{\Omega}$ に対して, $F_t(x_0,y_0)$, $t\in[0,\infty]$ を点 (x_0,y_0) から出発する V の積分曲線とする. すなわち, $F_t(x_0,y_0)$ は常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}F_t(x_0,y_0)=V(F_t(x_0,y_0)), \quad t>0,\\ F_0(x_0,y_0)=(x_0,y_0)\end{cases}$$

の (唯一つの) 解である. Ω がベクトル場 V に対して星型であるとは, 任意の $(x_0,y_0)\in\overline{\Omega}$ に対して, $F_t(x_0,y_0)\in\overline{\Omega}$ が任意の $t\in[0,\infty]$ で成り立つことを言う.

定義 5. $V(x,y)=(V_1(x,y),V_2(x,y))$ を $\overline{\Omega}$ 上の Lipschitz 連続なベクトル場とする. $\partial\Omega$ が V-starlike boundary であるとは, 任意の正則点 $(x,y)\in\partial\Omega$ において $V(x,y)\cdot n(x,y)\le 0$ が成り立つことを言う. ただし, $n(x,y)$ は点 (x,y) における $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである.

注意 6. Ω がベクトル場 V に対して星型ならば, Ω は V-starlike boundary を持つ.

以下では, type change function として次のものを考える.

$$K(y):=y|y|^{m-1}, \quad m>0. \tag{2.4}$$

対応する作用素 L は Gellerstedt operator と呼ばれる.
以上の設定下で, 次の定理が成り立つ.

定理 2.3. Ω はベクトル場 $V=(-(m+2)x,-\mu y)$ に対して星型であると仮定する. ただし, μ は $y>0$ のとき $\mu=2$, $y<0$ のとき $\mu=1$ とする. このとき, 任意の $f\in L^2(\Omega;|K|^{-1})$ に対して, 境界値問題 (2.1) の弱解が唯一つ存在する.

定理 2.3 の証明のため, 次の補題を準備する.

補題 2.4. 定理 2.3 の仮定下で, 次の評価が成り立つ: ある定数 $C_1>0$ が存在して, 任意の $u\in C_0^\infty(\Omega)$ に対して

$$\|u\|_{L^2(\Omega;|K|)}\le C_1\|Lu\|_{H^{-1}(\Omega;K)} \tag{2.5}$$

が成り立つ.

定義 6. 評価 (2.5) が成立するとき, 領域 Ω は Dirichlet 問題 (2.1) の弱解に対して admissible であるという.

補題 *2.4* の証明. 次の補助境界値問題を考える.

$$\begin{cases}Mv:=-\frac{1}{4}v+(m+2)xv_x+\mu yv_y=u & \text{in } \Omega,\\ v=0 & \text{on } \partial\Omega\backslash B.\end{cases} \tag{2.6}$$

まず, 次の命題を証明する. 任意の $u\in C_0^\infty(\Omega)$ に対して, 補助問題 (2.6) および次の性質を満たす関数 $v\in C^\infty(\Omega^\pm)\cap C^0(\overline{\Omega}\backslash B)$ が存在する.

$$\lim_{(x,y)\to B}v(x,y)=0, \tag{2.7}$$

$$\int_{\Omega^\pm} (|K|v_x^2 + v_y^2)\, dxdy < \infty. \tag{2.8}$$

特に, $v(B) = 0$ と定義すれば, $v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega; K)$ となる.

実際, u, v が滑らかであるとき, 方程式 $Mv = u$ は

$$-\frac{1}{4} v(F_t(x_0, y_0)) - \frac{d}{dt} v(F_t(x_0, y_0)) = u(F_t(x_0, y_0))$$

と書き換えられる. ただし, (x_0, y_0) は $\overline{\Omega}\backslash B$ の点, F_t は点 (x_0, y_0) から出発する V の積分曲線である. 特に $(x_0, y_0) \in \partial\Omega\backslash B$ とすれば, $\partial\Omega$ 上で $v = 0$ であったから, 先の常微分方程式を t に関して積分して

$$v(F_t(x_0, y_0)) = -\int_0^t e^{-(t-s)/4} u(F_s(x_0, y_0))\, ds \tag{2.9}$$

を得る. この表示から, 補助問題 (2.6) を満たす関数は一意に存在することが分かる. また, $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $V \in C^\infty(\Omega^\pm)^2$ であるから, $v \in C^\infty(\Omega^\pm)$ である.

この v が残りの 2 条件を満たすことを確認する. $s \in [0, S]$ を境界 $\partial\Omega$ の弧長パラメータとし, $\Gamma(0) = \Gamma(S) = B$ なる連続関数 Γ で $\partial\Omega$ をパラメータ付けする. $u \in C_0^\infty(\Omega)$ であることから, ある $\epsilon > 0$ が存在して, $\operatorname{supp} u \cap N_\epsilon(\partial\Omega) = \emptyset$ となる. ただし,

$$N_\epsilon(\partial\Omega) := \{(x, y) \in \overline{\Omega} \mid d((x, y), \partial\Omega) \leq \epsilon\}$$

である. このこととベクトル場の連続性に注意すると,

$$\begin{aligned}
\underline{s} &:= \inf\{s \in [0, S] \mid F_t(\Gamma(s)) \cap \operatorname{supp} u \neq \emptyset\}, \\
\overline{s} &:= \sup\{s \in [0, S] \mid F_t(\Gamma(s)) \cap \operatorname{supp} u \neq \emptyset\}
\end{aligned}$$

が存在することが分かる.

Ω が V に対して星型であることに注意して, Ω を次の 3 つの部分に分割する.

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &:= \{F_t(\Gamma(s)) \mid s \in [0, \underline{s}], t \in (0, \infty)\}, \\
\Omega_2 &:= \{F_t(\Gamma(s)) \mid s \in [\underline{s}, \overline{s}], t \in (0, \infty)\}, \\
\Omega_3 &:= \{F_t(\Gamma(s)) \mid s \in [\overline{s}, S], t \in (0, \infty)\}.
\end{aligned}$$

$(x, y) \in \Omega_1 \cup \Omega_3$ のとき, (x, y) を通る積分曲線は $\operatorname{supp} u$ と交点を持たないから, (2.9) より $v(x, y) = 0$ であることが分かる. また, $(x, y) \in B_\epsilon(B) \cap \Omega_2$ のとき, ある $s \in [\underline{s}, \overline{s}]$ と $T > 0$ が存在して, $(x, y) = F_T(\Gamma(s))$ と書ける. よって, $t > T$ に対して,

$$\begin{aligned}
v(F_t(x, y)) =& v(F_{t+T}(\Gamma(s))) \\
=& -\int_0^{t+T} e^{-(t+T-r)/4} u(F_r(\Gamma(s)))\, dr \\
=& -e^{-t/4} \int_0^T e^{-(T-r)/4} u(F_r(\Gamma(s)))\, dr - \int_0^t e^{-(t-r)/4} u(F_{T+r}(\Gamma(s)))\, dr \\
=& -e^{-t/4} v(x, y)
\end{aligned}$$

が成り立つ. v は $\overline{\Omega}\backslash B$ 上連続であるから, $\sup_{(x,y)\in\partial B_\epsilon(B)\cap\Omega_2}|v(x,y)|<\infty$ である. よって, $\lim_{t\to\infty}v(F_t(x,y))=0$ が成り立つ. 以上より, 条件 (2.7) が示された. このことを踏まえて, 以下では $v(B):=0$ と定義しておく.

次に, v が (2.8) を満たすことを示すために補助問題 (2.6) の解 v に対して, 積分

$$\int_{\Omega^+\backslash B_\epsilon(B)} vLu\,dxdy$$

の評価を与える. まず, $v\in C^0(\overline{\Omega})$, $Lu\in C_0^\infty(\Omega)$ であることから,

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\Omega^+\backslash B_\epsilon(B)}|vLu|\,dxdy<\infty$$

が成り立つことが分かる.

Ω^+ での積分に対して Green の公式を適用すれば, $Mv=u$ に注意して

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^+\backslash B_\epsilon(B)} vLu\,dxdy =&\frac{2m+1}{4}\int_{\Omega^+\backslash B_\epsilon(B)}[Kv_x^2+v_y^2]\,dxdy\\ &+\frac{1}{2}\int_{(\partial\Omega^+\backslash B_\epsilon(B))\cup(\partial B_\epsilon\cap\Omega^+)}[2v(Ku_x,u_y)-(Kv_x^2+v_y^2)(b,c)]\cdot n\,ds\end{aligned}$$

が得られる. $\operatorname{supp}u\cap\mathcal{N}_\epsilon(\partial\Omega)=\emptyset$ が成立するよう $\epsilon>0$ を十分小さく取っておけば, $(\partial\Omega\backslash B_\epsilon(B))\cap(\partial B_\epsilon\cap\Omega^+)$ 上で $u_x=u_y=0$ が成り立つ. よって, $\epsilon>0$ が十分小さい時

$$\int_{(\partial\Omega^+\backslash B_\epsilon(B))\cup(\partial B_\epsilon\cap\Omega^+)} v(Ku_x,u_y)\cdot n\,ds=-\int_{AB}vu_y\,dx$$

が成り立つ. また, $\partial\Omega\backslash B_\epsilon(B)$ の近傍では $v_x=v_y=0$, AB 上では $(b,c)\cdot n=0$ であるから,

$$\int_{\partial\Omega^+\backslash B_\epsilon(B)}(Kv_x^2+v_y^2)(b,c)\cdot n\,ds=0$$

である. さらに, $(x,y)\to B$ で $v(x,y)\to v(B)=0$ であるから,

$$\lim_{(x,y)\to B}|x||v_x(x,y)|=\lim_{(x,y)\to B}|y||v_x(x,y)|=\lim_{(x,y)\to B}|x||v_y(x,y)|=\lim_{(x,y)\to B}|y||v_y(x,y)|=0$$

が成り立つので,

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\partial B_\epsilon\cap\Omega^+}(Kv_x^2+v_y^2)(b,c)\cdot n\,ds=0$$

である. 以上をまとめて,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^+}vLu\,dxdy=&\frac{2m+1}{4}\int_{\Omega^+}[Kv_x^2+v_y^2]\,dxdy-\int_{AB}vu_y\,dx,\\ \int_{\Omega^+}[Kv_x^2+v_y^2]\,dxdy\le&\frac{4}{2m+1}\left\{\int_{\Omega^+}|vLu|\,dxdy+\int_{AB}|vu_y|\,dx\right\}<\infty\end{aligned}$$

が得られる.

Ω^- 上の積分についても同様の議論を適用して,

$$\int_{\Omega^-}vLu\,dxdy=\frac{1}{4}\int_{\Omega^-}[|K|v_x^2+(2m+3)v_y^2]\,dxdy+\int_{AB}vu_y\,dx,$$

$$\int_{\Omega^-}[|K|v_x^2+v_y^2]\,dxdy \le 4\left\{\int_{\Omega^-}|vLu|\,dxdy+\int_{AB}|vu_y|\,dx\right\}<\infty$$

が得られる．これにより, 補助問題 (2.6) の解 v が (2.8) を満たすことが確認された．

Ω^+ 上と Ω^- 上の積分とを足し合わせると,

$$\begin{aligned}(v,Lu)_{L^2} =&\int_{\Omega^+} vLu\,dxdy+\int_{\Omega^-} vLu\,dxdy\\ =&\frac{2m+1}{4}\int_{\Omega^+}(Kv_x^2+v_y^2)\,dxdy+\frac{1}{4}\int_{\Omega^-}(|K|v_x^2+(2m+3)v_y^2)\,dxdy\end{aligned}$$

が得られる．よって, $m>0$ ならば, 任意の $u\in C_0^\infty(\Omega)$ に対して,

$$|(v,Lu)_{L^2}|\ge\frac{1}{4}\int_{\Omega}(|K|v_x^2+v_y^2)\,dxdy=\frac{1}{4}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega;K)}$$

が成り立つ．

一方, 一般化された Schwarz の不等式より,

$$|(v,Lu)_{L^2}|=|\langle v,Lu\rangle|\le\|v\|_{H_0^1(\Omega;K)}\|Lu\|_{H^{-1}(\Omega;K)}$$

が成り立つ．

これらの評価を合わせて,

$$\frac{1}{4}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega;K)}\le\|v\|_{H_0^1(\Omega;K)}\|Lu\|_{H^{-1}(\Omega;K)}$$

が成り立つ．これを整理して,

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega;K)}\le4\|Lu\|_{H^{-1}(\Omega;K)}$$

を得る．ところで, 作用素 $M:H_0^1(\Omega;K)\to L^2(\Omega;|K|)$ は連続であるから, ある定数 $C_M>0$ が存在して,

$$\|u\|_{L^2(\Omega;|K|)}=\|Mv\|_{L^2(\Omega;|K|)}\le C_M\|v\|_{H_0^1(\Omega;K)}$$

が成り立つ．ゆえに,

$$\|u\|_{L^2(\Omega;|K|)}\le4C_M\|Lu\|_{H^{-1}(\Omega;K)}$$

が成り立つ．これはまさに評価 (2.5) である． □

定理 *2.3* の証明．領域 Ω が admissible であると仮定する．このとき, $f\in L^2(\Omega;|K|^{-1})$ に対して, $C_0^\infty(\Omega)$ 上の有界線型汎関数 J_f を

$$J_f(L\varphi):=(f,\varphi)_{L^2},\quad \varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

で定義する．補題 2.4 より, 任意の $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ に対して

$$|J_f(L\varphi)|\le\|f\|_{L^2(\Omega;|K|^{-1})}\|\varphi\|_{L^2(\Omega;|K|)}\le C_1\|f\|_{L^2(\Omega;|K|^{-1})}\|L\varphi\|_{H^{-1}(\Omega;K)}$$

が成り立つ．よって, J_f は V 上の有界線型汎関数となる．ただし,

$$V:=\{L\varphi\in H^{-1}(\Omega;K)\mid\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\}$$

である. Hahn-Banach の定理より, J_f は $\overline{V} \subset H^{-1}(\Omega; K)$ まで拡張できる. さらに $\overline{V}^{\perp}$ 上では 0 と定めることにより, J_f を $H^{-1}(\Omega; K)$ 上の有界線型汎関数にまで拡張する.

ここで, Riesz の表現定理から, 任意の $\Phi \in H^{-1}(\Omega; K)$ に対して

$$\langle \Phi, u \rangle = J_f(\Phi)$$

が成り立つ. 特に, $\Phi \in V$ と取れば, ある $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ が存在して $\Phi = L\varphi$ と書け,

$$\langle L\varphi, u \rangle = J_f(L\varphi) = (f, \varphi)_{L^2}$$

が成り立つことが分かる. ただし, L は $H_0^1(\Omega; K)$ への自己共役拡大を取っている.

上で得られた超関数解 $u \in H_0^1(\Omega; K)$ が弱解になっていることを確認する. u の $H_0^1(\Omega; K)$ での近似列 $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ を 1 つ取る. すなわち, $n \to \infty$ で $\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega;K)} \to 0$ が成り立つとする. このとき, $f_n := Lu_n$ とすると, 作用素 $L : H_0^1(\Omega; K) \to H^{-1}(\Omega; K)$ の連続性から, ある $\tilde{f} \in H^{-1}(\Omega; K)$ が存在して, $n \to \infty$ で $\|f_n - \tilde{f}\|_{H^{-1}(\Omega;K)} \to 0$ となる.

また, 作用素 L は自己共役であるから,

$$\langle u_n, L\varphi \rangle = \langle Lu_n, \varphi \rangle = (f_n, \varphi)_{L^2(\Omega)}$$

が任意の $\varphi \in H_0^1(\Omega; K)$ に対して成り立つ. よって, 任意の $\varphi \in H_0^1(\Omega; K)$ に対して

$$|(f_n - f, \varphi)_{L^2(\Omega)}| = |\langle u_n - u, L\varphi \rangle| \le \|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega;K)} \|L\varphi\|_{H^{-1}(\Omega;K)}$$

が成り立つ. これにより, f_n が f に $H^{-1}(\Omega; K)$ の意味で弱収束することが分かる.

最後に, 任意の $\varphi \in H_0^1(\Omega; K)$ に対して

$$|\langle f - \tilde{f}, \varphi \rangle| \le |\langle f_n - f, \varphi \rangle| + \|f_n - \tilde{f}\|_{H^{-1}(\Omega;K)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega;K)}$$

とし, $n \to \infty$ で右辺が 0 に収束することから, $H^{-1}(\Omega; K)$ で $f = \tilde{f}$ が成り立つ. よって, $n \to \infty$ で

$$\|f_n - f\|_{H^{-1}(\Omega;K)} = \|f_n - \tilde{f}\|_{H^{-1}(\Omega;K)} \to 0$$

となり, 結論を得る. □

参考文献

[1] D. Lupo, C. S. Morawetz and K. R. Payne, On closed boundary value problems for equations of mixed elliptic–hyperbolic type, Comm. Pure Appl. Math., 60, (2007), pp. 1319—1348.

[2] C. S. Morawetz, The Dirichlet problem for the Tricomi equation, Comm. Pure Appl. Math., 23, (1970), pp. 587–601.

[3] M. Pilant, The Neumann problem for an equation of Lavrent'ev-Bitsadze type, J. Math. Anal. Appl., 106(2), (1985), pp. 321—359.