楕円型作用素の随伴について

川越 大輔

2021 年 4 月 28 日

概 要

本稿では, 楕円型作用素が適当な条件を満たすとき, その随伴作用素が形式的随伴作用素と一致することを確認する.

1 イントロダクション

Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界領域とし, その境界 $\partial\Omega$ は十分滑らか (例えば C^2 級) であるとする. Ω 上の微分作用素 $\mathcal{L}$ を次で定義する:

$$\mathcal{L}u := -\partial_{x_i}(a_{ij}u_{x_j}) + a_i u_{x_i} + au. \tag{1.1}$$

ただし, 係数 a_{ij}, a_i および a は以下の条件を満たすものとする.

1. $a_{ij}, a_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $a \in L^\infty(\Omega)$,
2. 任意の i, j に対して $a_{ij} = a_{ji}$,
3. ある $\mu > 0$, $\nu > 0$ が存在して, 任意の $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して
$$\nu|\xi|^2 \le a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^2$$
がほとんど至るところの $x \in \Omega$ について成り立つ.

このとき, 微分作用素 $\mathcal{L}$ は $D(\mathcal{L}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ を定義域とする $L^2(\Omega)$ 上の非有界線型作用素と見なすことができる.

今, 微分作用素 $\mathcal{L}$ の形式的随伴作用素を $\mathcal{L}'$ とする. すなわち,

$$\mathcal{L}'v := -\partial_{x_j}(a_{ij}v_{x_i}) - \partial_{x_i}(a_i v) + av \tag{1.2}$$

とする. 作用素 $\mathcal{L}$ と同様に, 作用素 $\mathcal{L}'$ も $D(\mathcal{L}') = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ を定義域とする $L^2(\Omega)$ 上の非有界線型作用素と見なすことができる.

また, 微分作用素 $\mathcal{L}$ の随伴作用素 $\mathcal{L}^*$ は次のように定義される: $v \in L^2(\Omega)$ を 1 つ固定する. このとき, ある $w \in L^2(\Omega)$ が存在して, 任意の $u \in D(\mathcal{L})$ に対して

$$(\mathcal{L}u, v)_{L^2(\Omega)} = (u, w)_{L^2(\Omega)}$$

が成立するならば, $v \in D(\mathcal{L}^*)$ として, $w = \mathcal{L}^*v$ と定める. すなわち, 任意の $u \in D(\mathcal{L})$, $v \in D(\mathcal{L}^*)$ に対して

$$(\mathcal{L}u, v)_{L^2(\Omega)} = (u, \mathcal{L}^*v)_{L^2(\Omega)} \tag{1.3}$$

が成立するものとする.

補足 1. 上の作用素 $\mathcal{L}^*$ が well-defined であることを確かめる. ある $w_1, w_2 \in L^2(\Omega)$ が存在して, 任意の $u \in D(\mathcal{L})$ に対して

$$(\mathcal{L}u, v)_{L^2(\Omega)} = (u, w_j)_{L^2(\Omega)}, \quad j = 1, 2$$

が成立したと仮定しよう. このとき, 辺々を引き算すれば, 任意の $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ に対して

$$(u, w_1 - w_2)_{L^2(\Omega)} = 0$$

が成り立つ. $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ は $L^2(\Omega)$ で稠密であるから, 上の u として $w_1 - w_2$ に $L^2(\Omega)$ の意味で収束する列を取れば $\|w_1 - w_2\|_{L^2(\Omega)} = 0$ すなわち $w_1 = w_2$ である. したがって, 作用素 $\mathcal{L}^*$ は well-defined である.

また, 内積の線型性から, 作用素 $\mathcal{L}^*$ の線型性が従う.

本稿では, 微分作用素 $\mathcal{L}^*$ の定義域 $D(\mathcal{L}^*)$ について考察する.

定理 1.1. (1.1) で定義される微分作用素 $\mathcal{L}$ の係数 a_{ij}, a_i および a は所与の仮定を満たすものとする. このとき, $\mathcal{L}$ の形式的随伴作用素 $\mathcal{L}'$ と随伴作用素 $\mathcal{L}^*$ は一致する. すなわち,

$$D(\mathcal{L}^*) = D(\mathcal{L}') = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

であり, 任意の $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ に対して $\mathcal{L}^* v = \mathcal{L}' v$ が成り立つ.

2 定理 1.1 の証明

定理 1.1 の証明のために作用素 $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ および $\mathcal{L}^*$ の性質を調べておく.

命題 2.1. 微分作用素 $\mathcal{L}$ および $\mathcal{L}'$ はそれぞれ $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ への全単射である.

証明. 微分作用素 $\mathcal{L}$ についてのみ命題を証明する. 微分作用素 $\mathcal{L}'$ についても同様に証明される.

$f \in L^2(\Omega)$ とし, 境界値問題

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

を考える. 係数 a_{ij} に対する仮定から弱形式に対して Lax-Milgram の定理が適用できて, 境界値問題 (2.1) は一意解 $u \in H_0^1(\Omega)$ を持つ. また, 係数 a_{ij} および境界 $\partial\Omega$ の滑らかさに関する仮定から, 解 u は $H^2(\Omega)$ に属する [1]. 以上により, 命題が証明された. □

定義 1. X, Y を Hilbert 空間, A を X から Y への線型作用素とする. A の零空間 $\mathcal{N}(A)$ および像 $\mathcal{R}(A)$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &:= \{x \in D(A) \mid Ax = 0\}, \\ \mathcal{R}(A) &:= \{y \in Y \mid \text{ある } x \in D(A) \text{ が存在して } y = Ax\} \end{aligned}$$

と定義する.

命題 2.2. 随伴作用素 $\mathcal{L}^*$ について,

$$\mathcal{N}(\mathcal{L}^*) = \{0\}$$

が成り立つ.

証明. $\mathcal{R}(\mathcal{L}) = L^2(\Omega)$ と $\mathcal{N}(\mathcal{L}^*) = \mathcal{R}(\mathcal{L})^\perp$ から結論が従う. □

定義 2. X, Y を Hilbert 空間, S, T を X から Y への線型作用素とする. T が S の拡大 (または S が T の縮小) であるとは, $D(S) \subset D(T)$ かつ任意の $x \in D(S)$ に対して $Sx = Tx$ が成立することである. T が S の拡大であることを $S \subset T$ と表す.

命題 2.3. 形式的随伴作用素 $\mathcal{L}'$ と随伴作用素 $\mathcal{L}^*$ について, $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}^*$ が成り立つ.

証明. $v \in D(\mathcal{L}') = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ を 1 つ固定する. このとき, 形式的随伴作用素の定義と部分積分により

$$(\mathcal{L}u, v)_{L^2(\Omega)} = (u, \mathcal{L}'v)_{L^2(\Omega)}$$

が任意の $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ に対して成り立つ. 随伴作用素 $\mathcal{L}^*$ の定義より, これは $v \in D(\mathcal{L}^*)$, $\mathcal{L}^*v = \mathcal{L}'v$ を意味する. したがって, $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}^*$ が成り立つ. □

命題 2.1 および命題 2.3 から,

$$\mathcal{L}^*(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) = \mathcal{L}'(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) = L^2(\Omega)$$

が成り立つ. 一方, 定義より $\mathcal{R}(\mathcal{L}^*) = L^2(\Omega)$ であるから,

$$D(\mathcal{L}^*) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cup \mathcal{N}(\mathcal{L}^*)$$

である. ところが, 命題 2.2 より $\mathcal{N}(\mathcal{L}^*) = \{0\}$ である. したがって,

$$D(\mathcal{L}^*) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

である. 以上で定理 1.1 が証明された.

参考文献

[1] O. A. Ladyzhenskaya, *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Applied Mathematical Sciences 49, Springer-Verlag, New York (1985) (Original Russian edition published by Nauka, Moscow (1973)).