# 移流方程式の解の $L^p$ 評価

川越 大輔

2021 年 5 月 25 日

## 1　イントロダクション

$\Omega$ を $\mathbb{R}^d$ の有界領域とし, その境界 $\partial\Omega$ は区分的に $C^1$ 級であるとする. また, $n(x)$ を点 $x \in \partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトルとする. さらに, $a(x) = (a_1(x), \ldots, a_d(x))$ を $\overline{\Omega}$ 上の $C^1$ 級ベクトル場とし, 各 $x \in \overline{\Omega}$ において $|a(x)| \neq 0$ とする. このとき, 領域 $\Omega$ の境界 $\partial\Omega$ を次の 3 つに分解する.

$$\begin{aligned}\Gamma_+ :=& \{x \in \partial\Omega \mid n(x) \cdot a(x) > 0\},\\ \Gamma_- :=& \{x \in \partial\Omega \mid n(x) \cdot a(x) < 0\},\\ \Gamma_0 :=& \partial\Omega \backslash (\Gamma_+ \cup \Gamma_-).\end{aligned}$$

$x_0 \in \Gamma_-$ とし, 初期値問題

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}(t) = a(x(t)),\\ x(0) = x_0\end{cases} \tag{1.1}$$

を考える. ベクトル場 $a$ が $\overline{\Omega}$ 上で $C^1$ 級であるから, 初期値問題 (1.1) は一意解 $X(t; x_0)$ を持つ. この解 $X(t; x_0)$ に対して,

$$\tau_+(x_0) := \sup\{t \geq 0 \mid X(t; x_0) \in \Omega\}$$

とおく. 簡単のため, 以下では $T_+ := \sup_{x_0 \in \Gamma_-} \tau_+(x_0) < \infty$ を仮定する.

領域 $\Omega$ の部分集合 $\Omega_0$ を

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega \mid \text{ある } x_0 \in \Gamma_- \text{とある } 0 < t < \tau_+(x_0) \text{ が存在して } x = X(t; x_0)\}$$

で定義する. 以下では集合 $\Omega \backslash \Omega_0$ の測度が 0 であることを仮定する.

$u_0 \in C^0(\Gamma_-)$, $f \in L^1(\Omega) \cap C^0(\Omega_0)$ とし, 次の境界値問題を考える.

$$\begin{cases}a(x) \cdot \nabla u(x) = f(x), & x \in \Omega,\\ u(x) = u_0(x), & x \in \Gamma_-.\end{cases} \tag{1.2}$$

本稿では, 境界値問題 (1.2) の解の評価について考察する. 境界値問題 (1.2) の解 $u$ は, 初期値問題 (1.1) の解 $X(t; x_0)$ を用いて

$$u(X(t; x_0)) = u_0(x_0) + \int_0^t f(X(s; x_0))\, ds \tag{1.3}$$

と書ける. 実際, $\Omega_0$ 上の点 $x=X(t;x_0)$ において

$$a(x)\cdot\nabla u(x) := \frac{d}{dt}u(X(t;x))$$

と見なすことにすれば, この関数 $u$ は $\Omega_0$ 上で $a\cdot\nabla u=f$ を満たし, $\Gamma_-$ 上の各点 $x_0$ に対して

$$\lim_{t\downarrow 0} u(X(t;x_0)) = u_0(x_0)$$

が成り立つ. $\Omega\backslash\Omega_0$ 上では解は定義されないものの, 仮定より $\Omega\backslash\Omega_0$ の測度は 0 であるから, この集合上では微分方程式を考えないことにする.

**補足 1.** 本稿では (1.3) で表される解 $u$ に対して $L^p$ 評価を与えるが, これは a posteriori 評価である. したがって, 以下の $L^p$ 評価からは境界値問題 (1.2) の解の一意性は従わない.

## 2 最大値評価

境界値問題 (1.2) の解の最大値について考察する.

**命題 2.1.** $u_0$ を $\Gamma_-$ 上の有界な連続関数, $f$ を $\Omega$ 上の有界連続関数とする. このとき, 境界値問題 (1.2) の解 $u$ に対して

$$\sup_{x\in\Omega_0\cup\Gamma_-}|u(x)| \le \sup_{x_0\in\Gamma_-}|u_0(x_0)| + T_+\sup_{x\in\Omega}|f(x)|$$

が成り立つ.

**証明.** 解の表示式 (1.3) を評価すれば, 各 $x=X(t;x_0)\in\Omega_0\cup\Gamma_-$ において

$$\begin{aligned}|u(X(t;x_0))| &\le |u_0(x_0)| + \int_0^t |f(X(s;x_0))|\,ds \\ &\le \sup_{x_0\in\Gamma_-}|u_0(x_0)| + \sup_{x_0\in\Gamma_-}\tau_+(x_0)\sup_{x\in\Omega}|f(x)| \\ &\le \sup_{x_0\in\Gamma_-}|u_0(x_0)| + T_+\sup_{x\in\Omega}|f(x)|\end{aligned}$$

が得られる. 左辺の上限を考えて結論を得る. □

## 3 $L^p$ 評価

$1\le p<\infty$ として, 境界値問題 (1.2) の解の $L^p$ 評価について考察する.
部分積分により, 次の命題が成り立つ.

**命題 3.1.** $u\in C^1(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ とする. このとき,

$$\int_\Omega \operatorname{div}(a(x)u(x))\,dx = \int_{\Gamma_+} u(x_0)n(x_0)\cdot a(x_0)\,d\sigma_{x_0} - \int_{\Gamma_-} u(x_0)|n(x_0)\cdot a(x_0)|\,d\sigma_{x_0}$$

が成り立つ.

**系 3.2.** $u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ とする．このとき, $\mathrm{div}\,(au) = 0$ ならば,

$$\int_{\Gamma_+} u(x_0)n(x_0) \cdot a(x_0)\, d\sigma_{x_0} = \int_{\Gamma_-} u(x_0)|n(x_0) \cdot a(x_0)|\, d\sigma_{x_0}$$

が成り立つ.

**系 3.3.** $u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ とする．このとき, $\mathrm{div}\, a = 0$, $a \cdot \nabla u = 0$ ならば,

$$\int_{\Gamma_+} u(x_0)n(x_0) \cdot a(x_0)\, d\sigma_{x_0} = \int_{\Gamma_-} u(x_0)|n(x_0) \cdot a(x_0)|\, d\sigma_{x_0}$$

が成り立つ.

$1 \le p < \infty$ とする．$\Gamma_+$ 上の関数 $u_0$ に対して

$$\|u_0\|_{L^p(\Gamma_+;|n\cdot a|)} := \left(\int_{\Gamma_+} |u_0(x_0)|^p |n(x_0) \cdot a(x_0)|\, d\sigma_{x_0}\right)^{1/p}$$

とし,

$$L^p(\Gamma_+; |n \cdot a|) := \{u_0 \mid \|u_0\|_{L^p(\Gamma_+;|n\cdot a|)} < \infty\}$$

とする．同様にして, 関数空間 $L^p(\Gamma_-; |n \cdot a|)$ を定義する．系 3.2, 3.3 において, 関数 $u$ を正の部分と負の部分に分けることで, 次の等式を得る.

**系 3.4.** $u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ とする．このとき, $\mathrm{div}\,(au) = 0$ ならば,

$$\|u\|_{L^1(\Gamma_+;|n\cdot a|)} = \|u\|_{L^1(\Gamma_-;|n\cdot a|)}$$

が成り立つ.

**系 3.5.** $u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ とする．このとき, $\mathrm{div}\, a = 0$, $a \cdot \nabla u = 0$ ならば,

$$\|u\|_{L^1(\Gamma_+;|n\cdot a|)} = \|u\|_{L^1(\Gamma_-;|n\cdot a|)}$$

が成り立つ.

変数変換 $x = X(t; x_0)$, $x_0 \in \Gamma_-$, $0 < t < \tau_+(x_0)$ を考える．$\Gamma_-$ における $x_0$ の微小近傍を $d\sigma_{x_0}$ とし,

$$\begin{aligned} d\sigma_{t,x_0} :=& \{x = X(t; y) \mid y \in d\sigma_{x_0}\}, \\ \Omega(t) :=& \{x = X(\tau; y) \mid 0 < \tau < t, y \in d\sigma_{x_0}\}, \\ S(t) :=& \{x = X(\tau; y) \mid 0 < \tau < t, y \in \partial d\sigma_{x_0}\} \end{aligned}$$

とおく．このとき, 任意の $u \in C^1(\Omega(t)) \cap C^0(\overline{\Omega(t)})$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t)} \mathrm{div}\,(a(x)u(x))\, dx =& u(X(t; x_0))n(X(t; x_0)) \cdot a(X(t; x_0))\, d\sigma_{t,x_0} \\ & - u(x_0)|n(x_0) \cdot a(x_0)|\, d\sigma_{x_0} + \int_{S(t)} u(x)a(x) \cdot n(x)\, d\sigma \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $a(x) = dx/dt$ は $S(t)$ の接ベクトルであるから,

$$\int_{S(t)} u(x)a(x) \cdot n(x)\, d\sigma = 0$$

である. また, $a \in C^2(\overline{\Omega})$ のとき,

$$u(X(t;y)) = \exp\left(-\int_0^t (\operatorname{div} a)(X(r;y))\, dr\right), \quad y \in d\sigma_{x_0}$$

は $C^1(\Omega(t)) \cap C^0(\overline{\Omega(t)})$ であって境界値問題

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a(x)u(x)) = 0, & x \in \Omega(t), \\ u|_{d\sigma_{x_0}} = 1 \end{cases}$$

を満たす. よって, このように $u$ を取れば

$$\exp\left(-\int_0^t (\operatorname{div} a)(X(r;x_0))\, dr\right) n(X(t;x_0)) \cdot a(X(t;x_0))\, d\sigma_{t,x_0} = |n(x_0) \cdot a(x_0)|\, d\sigma_{x_0},$$

すなわち

$$d\sigma_{t,x_0} = \exp\left(\int_0^t (\operatorname{div} a)(X(r;x_0))\, dr\right) \frac{|n(x_0) \cdot a(x_0)|}{n(X(t;x_0)) \cdot a(X(t;x_0))}\, d\sigma_{x_0}$$

が得られる. 一方, $d\sigma_{t,x_0}$ に垂直な方向の増分は

$$\frac{dX}{dt}(t;x_0) \cdot n(X(t;x_0))\, dt = a(X(t;x_0)) \cdot n(X(t;x_0))\, dt$$

である. よって, 変数変換 $x = X(t;x_0)$ について

$$\begin{aligned} dx =& a(X(t;x_0)) \cdot n(X(t;x_0))\, dt \cdot \exp\left(\int_0^t (\operatorname{div} a)(X(r;x_0))\, dr\right) \frac{|n(x_0) \cdot a(x_0)|}{n(X(t;x_0)) \cdot a(X(t;x_0))}\, d\sigma_{x_0} \\ =& \exp\left(\int_0^t (\operatorname{div} a)(X(r;x_0))\, dr\right) |n(x_0) \cdot a(x_0)|\, dt\, d\sigma_{x_0} \end{aligned}$$

が成り立つ. なお, 議論の途中で $a \in C^2(\overline{\Omega})$ を仮定したが, 適当な近似列を取ることでこの等式は任意の $a \in C^1(\overline{\Omega})$ に対しても成り立つことが分かる. このことから, 次の補題が得られる.

**補題 3.6.** $u \in L^1(\Omega)$ とする. このとき,

$$\int_{\Omega_0} u(x)\, dx = \int_{\Gamma_-} \left(\int_0^{\tau_+(x_0)} u(X(t;x_0)) \exp\left(\int_0^t (\operatorname{div} a)(X(r;x_0))\, dr\right)\, dt\right) |n(x_0) \cdot a(x_0)|\, d\sigma_{x_0}$$

が成り立つ.

**系 3.7.** $u \in L^1(\Omega)$, $\operatorname{div} a = 0$ とする. このとき,

$$\int_{\Omega_0} u(x)\, dx = \int_{\Gamma_-} \left(\int_0^{\tau_+(x_0)} u(X(t;x_0))\, dt\right) |n(x_0) \cdot a(x_0)|\, d\sigma_{x_0}$$

が成り立つ.

**定理 3.8.** $1 \le p < \infty$, $u_0 \in L^p(\Gamma_-; |n \cdot a|)$, $f \in L^p(\Omega)$, とする. このとき,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le 2^{1-1/p} A_0^{1/p} \|u_0\|_{L^p(\Gamma_-;|n\cdot a|)} + 2^{1-1/p} A_p^{1/p} \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

が成り立つ. ただし,

$$\begin{aligned}
A_0 &:= \sup_{x_0 \in \Gamma_-} \int_0^{\tau_+(x_0)} \exp\left( \int_0^t (\operatorname{div} a)(X(r;x_0))\, dr \right) dt, \\
A_p &:= \sup_{x_0 \in \Gamma_-} \tau_+(x_0)^{p-1} \int_0^{\tau_+(x_0)} \exp\left( \int_0^t (\operatorname{div} a)(X(r;x_0))\, dr \right) dt
\end{aligned}$$

である.

**証明.** $1 \le p < \infty$, $a \ge 0$, $b \ge 0$ のとき $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ が成立することに注意すると, 補題 3.6 より,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_0} |u(x)|^p \, dx = &\int_{\Gamma_-} \int_0^{\tau_+(x_0)} |u_0(x_0) + \int_0^t f(X(s;x_0))\, ds|^p \exp\left( \int_0^t (\operatorname{div} a)(X(r;x_0))\, dr \right) dt \\
&\quad \times |n(x_0) \cdot a(x_0)| \, d\sigma_{x_0} \\
\le &2^{p-1} \int_{\Gamma_-} \left( \int_0^{\tau_+(x_0)} \exp\left( \int_0^t (\operatorname{div} a)(X(r;x_0))\, dr \right) dt \right) |u_0(x_0)|^p |n(x_0) \cdot a(x_0)| \, d\sigma_{x_0} \\
&+ 2^{p-1} \int_{\Gamma_-} \left( \int_0^{\tau_+(x_0)} \exp\left( \int_0^t (\operatorname{div} a)(X(r;x_0))\, dr \right) dt \right) \\
&\quad \times \left| \int_0^{\tau_+(x_0)} f(X(s;x_0))\, ds \right|^p |n(x_0) \cdot a(x_0)| \, d\sigma_{x_0} \\
\le &2^{p-1} A_0 \int_{\Gamma_-} |u_0(x_0)|^p |n(x_0) \cdot a(x_0)| \, d\sigma_{x_0} \\
&+ 2^{p-1} A_p \int_{\Gamma_-} \int_0^{\tau_+(x_0)} |f(X(s;x_0))|^p \, ds |n(x_0) \cdot a(x_0)| \, d\sigma_{x_0} \\
= &2^{p-1} A_0 \|u_0\|_{L^p(\Gamma_-;|n\cdot a|)}^p + 2^{p-1} A_p \|f\|_{L^p(\Omega)}^p
\end{aligned}$$

が成り立つ. $0 < q \le 1$, $a \ge 0$, $b \ge 0$ のとき $(a+b)^q \le a^q + b^q$ が成立することに注意すれば,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(\Omega)} &\le \left( 2^{p-1} A_0 \|u_0\|_{L^p(\Gamma_-;|n\cdot a|)}^p + 2^{p-1} A_p \|f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \\
&\le 2^{1-1/p} A_0^{1/p} \|u_0\|_{L^p(\Gamma_-;|n\cdot a|)} + 2^{1-1/p} A_p^{1/p} \|f\|_{L^p(\Omega)}
\end{aligned}$$

が得られる. □

**系 3.9.** $1 \le p < \infty$, $u_0 \in L^p(\Gamma_-; |n \cdot a|)$, $f \in L^p(\Omega)$, $\operatorname{div} a = 0$ とする. このとき,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le 2^{1-1/p} \left( T_+^{1/p} \|u_0\|_{L^p(\Gamma_-;|n\cdot a|)} + T_+ \|f\|_{L^p(\Omega)} \right)$$

が成り立つ.

これを利用して, Poincaré 型の不等式が得られる.

**系 3.10.** $1 \le p < \infty$ とする. $u \in W^{1,p}(\Omega)$ が $\Gamma_-$ 上で $u = 0$ を満たすならば,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le d^{1-1/p} A_p^{1/p} \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

が成り立つ.

**証明.** 定理 3.8 の証明において, $u_0 = 0$ のときには右辺に $2^{p-1}$ をかけなくても不等式が成立することに注意すると, $f = a \cdot \nabla u$ として

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le A_p^{1/p} \|a \cdot \nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

が得られる. ここで,

$$\int_\Omega |a(x) \cdot \nabla u(x)|^p \, dx \le d^{p-1} \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^p \int_\Omega \sum_{j=1}^d |\partial_{x_j} u(x)|^p \, dx$$

と評価して辺々を $1/p$ 乗すれば, 先の評価と合わせて結論が得られる. □

**系 3.11.** $1 \le p < \infty$, $\operatorname{div} a = 0$ とする. $u \in W^{1,p}(\Omega)$ が $\Gamma_-$ 上で $u = 0$ を満たすならば,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le d^{1-1/p} T_+ \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

が成り立つ.

## 参考文献


[1] Wikipedia: Convection-diffusion equation `https://en.wikipedia.org/wiki/Convection-diffusion_equation`