移流方程式の L^p 解の存在

川越 大輔

2021 年 5 月 16 日

Ω を $\mathbb{R}^d$ の有界領域とし, その境界 $\partial\Omega$ は区分的に C^1 級であるとする. また, $n(x)$ を点 $x \in \partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトルとする. さらに, $a(x) = (a_1(x), \ldots, a_d(x))$ を $\overline{\Omega}$ 上の C^1 級ベクトル場とし, 各 $x \in \overline{\Omega}$ において $|a(x)| \neq 0$ とする. このとき, 領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ を次の 3 つに分解する.

$$
\begin{aligned}
\Gamma_+ :=& \{x \in \partial\Omega \mid n(x) \cdot a(x) > 0\}, \\
\Gamma_- :=& \{x \in \partial\Omega \mid n(x) \cdot a(x) < 0\}, \\
\Gamma_0 :=& \partial\Omega \backslash (\Gamma_+ \cup \Gamma_-).
\end{aligned}
$$

$x_0 \in \Gamma_-$ とし, 初期値問題

$$
\begin{cases}
\frac{dx}{dt}(t) = a(x(t)), \\
x(0) = x_0
\end{cases}
\tag{0.1}
$$

を考える. ベクトル場 a が $\overline{\Omega}$ 上で C^1 級であるから, 初期値問題 (0.1) は一意解 $x = X(t; x_0)$ を持つ. この解 $X(t; x_0)$ に対して,

$$
\tau_+(x_0) := \sup\{t \geq 0 \mid X(t; x_0) \in \Omega\}
$$

とおく. 簡単のため, 以下では $T_+ := \sup_{x_0 \in \Gamma_-} \tau_+(x_0) < \infty$ を仮定する. また, 領域 Ω の部分集合 Ω_0 を

$$
\Omega_0 := \{x \in \Omega \mid \text{ある } x_0 \in \Gamma_- \text{とある } 0 < t < \tau_+(x_0) \text{ が存在して } x = X(t; x_0)\}
$$

で定義し, 以下では集合 $\Omega \backslash \Omega_0$ の測度が 0 であることを仮定する.

$1 \leq p < \infty$ とする. Γ_+ 上の関数 u_0 に対して

$$
\|u_0\|_{L^p(\Gamma_+; |n \cdot a|)} := \left(\int_{\Gamma_+} |u_0(x_0)|^p |n(x_0) \cdot a(x_0)| \, d\sigma_{x_0} \right)^{1/p}
$$

とし,

$$
L^p(\Gamma_+; |n \cdot a|) := \{u_0 \mid \|u_0\|_{L^p(\Gamma_+; |n \cdot a|)} < \infty\}
$$

とする. 同様にして, 関数空間 $L^p(\Gamma_-; |n \cdot a|)$ を定義する.

$1 \leq p < \infty$, $u_0 \in L^p(\Gamma_-; |n \cdot a|)$, $f \in L^p(\Omega)$ とし, 次の境界値問題を考える.

$$
\begin{cases}
a(x) \cdot \nabla u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\
u(x) = u_0(x), & x \in \Gamma_-.
\end{cases}
\tag{0.2}
$$

本稿では, 境界値問題 (0.2) の L^p 解の存在について考察する. 境界値問題 (0.2) の L^p 解は次のように定義される.

定義 1. $1 \leq p < \infty$ とする. $u \in L^p(\Omega)$ が境界値問題 (0.2) の L^p 解であるとは, $\varphi|_{\Gamma_+} = 0$ を満たす任意の $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ に対して

$$\int_\Omega u(x) \mathrm{div}\,(-a(x)\varphi(x))\,dx = \int_{\Gamma_-} u_0(x_0)\varphi(x_0)|n(x_0)\cdot a(x_0)|\,d\sigma_{x_0} + \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

が成立することをいう.

補足 1. $p = \infty$ の場合も同様に L^p 解を定義することができるが, 解や境界値, 非斉次項を連続関数で近似できない等の問題が残る.

定理 0.1. $\mathrm{div}\,a = 0$ のとき, 境界値問題 (0.2) の L^p 解は存在する.

証明. まず, $u_0 \in C_0^1(\Gamma_-)$, $f \in C_0^1(\Omega_0)$ のとき, 境界値問題 (0.2) の古典解が存在することを証明する. $\Omega \cup \Gamma_-$ 上の関数 u を以下で定義する.

$$u(x) := \begin{cases} u_0(x), & x \in \Gamma_-, \\ u_0(x_0) + \int_0^t f(X(s;x_0))\,ds, & x = X(t,x_0) \in \Omega_0, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \tag{0.3}$$

特性曲線の方法により, この関数 u が古典解となっていることが分かる.

次に, $1 \leq p < \infty$, $u_0 \in C_0^1(\Gamma_-)$, $f \in C_0^1(\Omega_0)$ のとき, (0.3) で定義される古典解 u は L^p 解であることを証明する. 境界 $\partial\Omega$ の近傍では $f = 0$ であるから, (0.3) で定義される関数 u の定義域を $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ の元として $\overline{\Omega}$ へ拡張できる. あとは部分積分により結論が得られる.

続いて, $1 \leq p < \infty$, $u_0 \in C_0^1(\Gamma_-)$, $f \in C_0^1(\Omega_0)$, $\mathrm{div}\,a = 0$ のとき, (0.3) で定義される古典解 u は評価式

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq 2^{1-1/p}\left(T_+^{1/p}\|u_0\|_{L^p(\Gamma_-;|n\cdot a|)} + T_+\|f\|_{L^p(\Omega)}\right) \tag{0.4}$$

を満たす. 証明は [1] に譲る.

最後に, 任意の $u_0 \in L^p(\Gamma_-;|n\cdot a|)$, $f \in L^p(\Omega)$ に対して境界値問題 (0.2) の L^p 解が存在することを証明する. $C_0^1(\Gamma_-)$, $C_0^1(\Omega_0)$ はそれぞれ $L^p(\Gamma_-;|n\cdot a|)$, $L^p(\Omega)$ で稠密であるから, $(u_0, f) \in L^p(\Gamma_-;|n\cdot a|) \times L^p(\Omega)$ に収束する点列 $(u_{0,n}, f_n) \in C_0^1(\Gamma_-) \times C_0^1(\Omega_0)$ が取れる. $(u_{0,n}, f_n)$ に対応する境界値問題 (0.2) の古典解を u_n とすると, 評価式 (0.4) より $\{u_n\}$ は $L^p(\Omega)$ の Cauchy 列である. よって, 極限 $u = \lim_{n\to\infty} u_n \in L^p(\Omega)$ が存在する. また, 古典解 u_n は L^p 解でもあったから, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と $\varphi|_{\Gamma_+} = 0$ を満たす任意の $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ に対して

$$\int_\Omega u_n(x) \mathrm{div}\,(-a(x)\varphi(x))\,dx = \int_{\Gamma_-} u_{0,n}(x_0)\varphi(x_0)|n(x_0)\cdot a(x_0)|\,d\sigma_{x_0} + \int_\Omega f_n(x)\varphi(x)\,dx$$

が成立する. 両辺で $n \to \infty$ の極限を取れば,

$$\int_\Omega u(x) \mathrm{div}\,(-a(x)\varphi(x))\,dx = \int_{\Gamma_-} u_0(x_0)\varphi(x_0)|n(x_0)\cdot a(x_0)|\,d\sigma_{x_0} + \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

が得られる. よって, 先の極限関数 u が境界値問題 (0.2) の L^p 解であることが分かった.

以上より, 任意の $u_0 \in L^p(\Gamma_-;|n\cdot a|)$, $f \in L^p(\Omega)$ に対して境界値問題 (0.2) の L^p 解は存在する. □

参考文献

[1] 川越 大輔, 移流方程式の解の L^p 評価.

[2] Wikipedia: Convection-diffusion equation `https://en.wikipedia.org/wiki/Convection-diffusion_equation`