移流方程式の L^p 解の一意性

川越 大輔

2021 年 5 月 16 日

Ω を $\mathbb{R}^d$ の有界領域とし, その境界 $\partial\Omega$ は区分的に C^1 級であるとする. また, $n(x)$ を点 $x \in \partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトルとする. さらに, $a(x) = (a_1(x), \ldots, a_d(x))$ を $\overline{\Omega}$ 上の C^1 級ベクトル場とし, 各 $x \in \overline{\Omega}$ において $|a(x)| \neq 0$ とする. このとき, 領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ を次の 3 つに分解する.

$$\begin{aligned}
\Gamma_+ :=& \{x \in \partial\Omega \mid n(x) \cdot a(x) > 0\},\\
\Gamma_- :=& \{x \in \partial\Omega \mid n(x) \cdot a(x) < 0\},\\
\Gamma_0 :=& \partial\Omega \backslash (\Gamma_+ \cup \Gamma_-).
\end{aligned}$$

$x_0^* \in \Gamma_+$ とし, 初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = -a(x(t)), \\ x(0) = x_0^* \end{cases} \tag{0.1}$$

を考える. ベクトル場 a が $\overline{\Omega}$ 上で C^1 級であるから, 初期値問題 (0.1) は一意解 $x = X_b(t; x_0^*)$ を持つ. この解 $X_b(t; x_0^*)$ に対して,

$$\tau_-(x_0^*) := \sup\{t \geq 0 \mid X_b(t; x_0^*) \in \Omega\}$$

とおく. 以下では $T_- := \sup_{x_0^* \in \Gamma_+} \tau_-(x_0^*) < \infty$ を仮定する. また, 領域 Ω の部分集合 Ω_0^* を

$$\Omega_0^* := \{x \in \Omega \mid \text{ある } x_0^* \in \Gamma_+ \text{とある } 0 < t < \tau_-(x_0^*) \text{ が存在して } x = X_b(t; x_0^*)\}$$

で定義し, 以下では集合 $\Omega \backslash \Omega_0^*$ の測度が 0 であることを仮定する.

$1 \leq p < \infty$ とする. Γ_+ 上の関数 u_0 に対して

$$\|u_0\|_{L^p(\Gamma_+; |n \cdot a|)} := \left(\int_{\Gamma_+} |u_0(x_0)|^p |n(x_0) \cdot a(x_0)| \, d\sigma_{x_0} \right)^{1/p}$$

とし,

$$L^p(\Gamma_+; |n \cdot a|) := \{u_0 \mid \|u_0\|_{L^p(\Gamma_+; |n \cdot a|)} < \infty\}$$

とする. 同様にして, 関数空間 $L^p(\Gamma_-; |n \cdot a|)$ を定義する.

$1 \leq p < \infty$, $u_0 \in L^p(\Gamma_-; |n \cdot a|)$, $f \in L^p(\Omega)$ とし, 次の境界値問題を考える.

$$\begin{cases} a(x) \cdot \nabla u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = u_0(x), & x \in \Gamma_-. \end{cases} \tag{0.2}$$

本稿では, 境界値問題 (0.2) の L^p 解の一意性について考察する. 境界値問題 (0.2) の L^p 解は次のように定義される.

定義 1. $1 \le p < \infty$ とする. $u \in L^p(\Omega)$ が境界値問題 (0.2) の L^p 解であるとは, $\varphi|_{\Gamma_+} = 0$ を満たす任意の $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ に対して

$$\int_\Omega u(x)\mathrm{div}\,(-a(x)\varphi(x))\,dx = \int_{\Gamma_-} u_0(x_0)\varphi(x_0)|n(x_0)\cdot a(x_0)|\,d\sigma_{x_0} + \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

が成立することをいう.

補足 1. $p = \infty$ の場合も同様に L^p 解を定義することができるが, 解や境界値, 非斉次項を連続関数で近似できない等の問題が残る.

定理 0.1. 境界値問題 (0.2) の L^p 解は存在すれば一意である.

証明. 2 つの L^p 解 u_1, u_2 が存在したとする. このとき, $u := u_1 - u_2$ は次を満たす: $\varphi|_{\Gamma_+} = 0$ を満たす任意の $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ に対して

$$\int_\Omega u(x)\mathrm{div}\,(-a(x)\varphi(x))\,dx = 0.$$

ここで, $g \in C_0^1(\Omega)$ を 1 つ取り, 次の境界値問題を考える:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,(-a(x)v(x)) = g(x), & x \in \Omega, \\ v(x) = 0, & x \in \Gamma_+. \end{cases} \tag{0.3}$$

特性曲線の方法により境界値問題 (0.3) の解は

$$v(X_b(t;x_0^*)) = \int_0^t \exp\left(\int_s^t (\mathrm{div}\,a)(X_b(r;x_0^*))\,dr\right) g(X_b(s;x_0^*))\,ds$$

と書ける. この解は厳密には $\Omega_0^* \cup \Gamma_+$ でしか定義されていないが, $g \in C_0^1(\Omega)$ であるからこの解の定義域を $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ の元として Ω まで拡張することができる. この拡張された解 v を φ として取れば, $g \in C_0^1(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega u(x)g(x)\,dx = 0$$

が成立することが分かる. 関数 g の取り方は任意であったから, 変分法の基本補題によりほとんど至るところ $u = 0$, すなわち $u_1 = u_2$ である. □

参考文献

[1] Wikipedia: Convection-diffusion equation `https://en.wikipedia.org/wiki/Convection-diffusion_equation`