森光太朗氏の修士論文の主結果

川越 大輔

2021 年 5 月 12 日

本稿では, 森 [2] で得られた結果を概説する.

森 [2] では, $L > 0$, $d > 0$, $T > 0$ として次の領域

$$
\begin{aligned}
\Omega &\equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L,\ -d < y < 0\},\\
\Gamma_1 &\equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le L,\ y = 0\},\\
\Gamma_2 &\equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le L,\ y = -d\},
\end{aligned}
$$

を定め, 以下の初期値境界値問題を考察する:

$$
\begin{aligned}
&\Phi(t; \cdot, y) \in C^2_{\#}(0, L), && t \in [0, T],\ y \in [-d, 0], && (1)\\
&\Delta\Phi(t; x, y) = 0, && (x, y) \in \Omega,\ t \in (0, T), && (2)\\
&\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(t; x, y) + g\frac{\partial \Phi}{\partial y}(t; x, y) = 0, && (x, y) \in \Gamma_1,\ t \in (0, T), && (3)\\
&\frac{\partial \Phi}{\partial y}(t; x, y) + M\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t; x - \delta, y)\right)^m = 0, && (x, y) \in \Gamma_2,\ t \in (0, T), && (4)\\
&\Phi(0; x, y) = f(x, y), && (x, y) \in \Omega, && (5)\\
&\frac{\partial \Phi}{\partial t}(0; x, y) = h(x, y), && (x, y) \in \Omega. && (6)
\end{aligned}
$$

ただし, 初期値 f, h は次の整合条件を満たすものとする: $f, h \in C^2(\overline{\Omega})$ は Ω 上の調和関数であり,

$$
\begin{aligned}
&f(\cdot, y), h(\cdot, y) \in C^2_{\#}(0, L), && y \in [-d, 0],\\
&\frac{\partial f}{\partial y} + M\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x - \delta, y)\right)^m = 0, && (x, y) \in \Gamma_2,\\
&\frac{\partial h}{\partial y} + M\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x - \delta, y)\right)^m = 0, && (x, y) \in \Gamma_2
\end{aligned}
$$

を満たす.

境界条件 (4) が非線型でかつ位置 x について δ だけずれが生じているため, 初期値境界値問題 (1)–(6) の直接的な解析は極めて困難である. そこで森 [2] では, $m = 1$, $\delta = 0$ の

場合に限って解析を行い, 次の結果を得た: (1)–(6) を x 変数に Fourier 級数展開すると,

$$\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial y^2}(t,y)=\mu_n^2\Phi_n(t,y), \qquad t\in(0,T),\ y\in(-d,0), \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial t^2}(t,y)+g\frac{\partial\Phi_n}{\partial y}(t,y)=0, \qquad t\in(0,T),\ y=0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial y}(t,y)-G\mu_n^2\Phi_n(t,y)=0, \qquad t\in(0,T),\ y=-d, \tag{9}$$

$$\Phi_n(0,y)=f_n(y), \qquad y\in(-d,0), \tag{10}$$

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial t}(0,y)=h_n(y), \qquad y\in(-d,0) \tag{11}$$

となる. ただし,

$$\begin{aligned} X_n(x)&=\frac{1}{\sqrt{L}}e^{i\mu_n x}, \quad \mu_n=\frac{2n\pi}{L},\\ \Phi_n(t,y)&=\int_0^L \Phi(t;x,y)\overline{X_n(x)}\,dx,\\ f_n(y)&=\int_0^L f(x,y)\overline{X_n(x)}\,dx,\\ h_n(y)&=\int_0^L h(x,y)\overline{X_n(x)}\,dx \end{aligned}$$

とおいた. また f_n, h_n の満たす整合条件は

$$\frac{d^2f_n}{dy^2}(y)=\mu_n^2f_n(y),\ y\in(-d,0), \tag{12}$$

$$\frac{d^2h_n}{dy^2}(y)=\mu_n^2h_n(y),\ y\in(-d,0), \tag{13}$$

$$\frac{df_n}{dy}(-d)-G\mu_n^2f_n(-d)=0, \tag{14}$$

$$\frac{dh_n}{dy}(-d)-G\mu_n^2h_n(-d)=0 \tag{15}$$

と書き下される. 初期値境界値問題 (7)–(11) について, 次の定理が証明された.

定理 1. $n\in\mathbb{Z}$ に対して $f_n(y), h_n(y)$ が整合条件 (12)–(15) を満たす時, 次が成り立つ.

1. $n=0$ の時, $f_0(y), h_0(y)$ に対してある定数 F_0, H_0 が存在して, $f_0(y)=F_0, h_0(y)=H_0$ と表すことができる. また, 初期値境界値問題 (7)–(11) を満たす関数は

$$\Phi_0(t,y)=F_0+H_0t$$

で与えられる.

2. $n\neq 0$ の時, $f_n(y)$, $h_n(y)$ に対してある定数 F_n, H_n が存在して, $f_n(y)=F_nY_n(y)$, $h_n(y)=H_nY_n(y)$ と表すことができる. また, 初期値境界値問題 (7)–(11) を満たす関数は

$$\Phi_n(t,y)=(F_n\cos(\omega_nt)+\frac{H_n}{\omega_n}\sin(\omega_nt))Y_n(y)$$

で与えられる. ただし,

$$
\begin{aligned}
Y_n(y) &= \cosh(\mu_n y) + \theta_n \sinh(\mu_n y), && (16)\\
\theta_n &= \frac{\sinh(\mu_n d) + G\mu_n \cosh(\mu_n d)}{\cosh(\mu_n d) + G\mu_n \sinh(\mu_n d)}, && (17)\\
\omega_n &= \sqrt{g\mu_n\theta_n} && (18)
\end{aligned}
$$

である.

一般に, $m = 1$, $\delta = 0$ の場合, (1)–(6) を満たす解は, 定理 1 で求めた Fourier モード解の線形結合, すなわち

$$
\Phi(t; x, y) = (F_0 + H_0 t)X_0(x) + \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \left(F_n \cos(\omega_n t) + \frac{H_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) Y_n(y) X_n(x) \quad (19)
$$

で表されると予想される. しかしこの無限和がどの位相で収束し, その極限が (1)–(6) を満たすかどうかを議論することは困難である.

参考文献

[1] Kennedy, J. F., The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels, *J. Fluid Mech.*, Vol.16, pp.521–544, 1963.

[2] 森 光太朗, ポテンシャル流を用いた反砂堆現象の数理モデルとその解析, 京都大学大学院情報学研究科修士論文, 2021.