線型 Kennedy モデルの級数解の収束

川越 大輔

2021 年 5 月 13 日

1 イントロダクション

森 [2] では, $L > 0$, $d > 0$, $T > 0$ として次の領域

$$\begin{aligned}
\Omega &\equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L,\ -d < y < 0\},\\
\Gamma_1 &\equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le L,\ y = 0\},\\
\Gamma_2 &\equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le L,\ y = -d\},
\end{aligned}$$

を定め, 以下の初期値境界値問題を考察する:

$$\Phi(t;\cdot,y) \in C^2_{\#}(0,L), \qquad t \in [0,T],\ y \in [-d,0], \tag{1}$$

$$\Delta\Phi(t;x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Omega,\ t \in (0,T), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}(t;x,y) + g\frac{\partial\Phi}{\partial y}(t;x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Gamma_1,\ t \in (0,T), \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(t;x,y) + M\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(t;x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Gamma_2,\ t \in (0,T), \tag{4}$$

$$\Phi(0;x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(0;x,y) = h(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega. \tag{6}$$

ただし, 初期値 f, h は次の整合条件を満たすものとする: $f, h \in C^2(\overline{\Omega})$ は Ω 上の調和関数であり,

$$\begin{aligned}
&f(\cdot,y), h(\cdot,y) \in C^2_{\#}(0,L), && y \in [-d,0],\\
&\frac{\partial f}{\partial y} + M\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0, && (x,y) \in \Gamma_2,\\
&\frac{\partial h}{\partial y} + M\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = 0, && (x,y) \in \Gamma_2
\end{aligned}$$

を満たす.

森 [2] では, f, h が定数関数のときには

$$\Phi(t;x,y) = F_0 + H_0 t,$$

$f(x,y) = F_n Y_n(y) X_n(x)$, $h(x,y) = H_n Y_n(y) X_n(x)$ のとき

$$\Phi(t;x,y) = (F_n \cos(\omega_n t) + \frac{H_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t)) Y_n(y) X_n(x)$$

という特解が得られた. ただし,

$$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\mu_n x}, \quad \mu_n = \frac{2n\pi}{L}, \tag{7}$$

$$Y_n(y) = \cosh(\mu_n y) + \theta_n \sinh(\mu_n y), \tag{8}$$

$$\theta_n = \frac{\sinh(\mu_n d) + G\mu_n \cosh(\mu_n d)}{\cosh(\mu_n d) + G\mu_n \sinh(\mu_n d)}, \tag{9}$$

$$\omega_n = \sqrt{g\mu_n\theta_n} \tag{10}$$

とおいた.

(1)–(6) を満たす解は, これらの特解の線形結合, すなわち

$$\Phi(t;x,y) = (F_0 + H_0 t) X_0(x) + \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \left(F_n \cos(\omega_n t) + \frac{H_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) Y_n(y) X_n(x) \tag{11}$$

で表されると予想される. しかしこの無限和がどの位相で収束し, その極限が (1)–(6) を満たすかどうかを議論することは困難であった. 本稿では, 適当な仮定下での無限和 (11) の一様収束および項別微分可能性について論じる.

2 無限和 (11) の収束

まず, (8) 式に (9) 式を代入すると

$$Y_n(y) = \frac{\cosh(\mu_n(d+y)) + G\mu_n \sinh(\mu_n(d+y))}{\cosh(\mu_n d) + G\mu_n \sinh(\mu_n d)} \tag{12}$$

となる. この表式を踏まえて, $Y_0(y) = 1$ としておく. また, 双曲線関数 sinh, cosh の偶奇性と $\mu_{-n} = -\mu_n$ に着目すると, $\theta_{-n} = \theta_n$, $Y_{-n}(y) = Y_n(y)$ となる. さらに $t > 0$ において $\cosh t$, $\sinh t$ が正で単調増大することに注意すると, 次の補題が得られる.

補題 1. 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 区間 $[-d, 0]$ 上の関数 Y_n を (12) 式で定義する. このとき, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ と任意の $y_0 \in [-d, 0]$ に対して

$$\max_{y\in[-d,y_0]} |Y_n(y)| = Y_n(y_0) \leq Ce^{|\mu_n| y_0}$$

が成り立つ.

補足 1. 補題 1 に現れる定数 C が n に依存しないことを見るためには, 以下の補題 3 のような評価が必要である.

系 1. $m \in \mathbb{N}$ とする. (12) 式で定義される関数 Y_n について, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ と任意の $y_0 \in [-d, 0]$ に対して

$$\max_{y \in [-d, y_0]} |Y_n^{(2m)}(y)| = Y_n^{(2m)}(y_0) = \mu_n^{2m} Y_n(y_0) \leq C \mu_n^{2m} e^{|\mu_n| y_0}$$

が成り立つ.

証明. (12) 式より, 関数 Y_n について

$$Y_n^{(2m)}(y) = \mu_n^{2m} Y_n(y) \tag{13}$$

が成り立つ. よって, 補題 1 より結論が得られる. □

同様にして, 1 階導関数 Y_n' についても評価が得られる.

補題 2. (12) 式で定義される関数 Y_n について, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ と任意の $y_0 \in [-d, 0]$ に対して

$$\max_{y \in [-d, y_0]} |Y_n'(y)| = Y_n'(y_0) \leq C |\mu_n| e^{|\mu_n| y_0}$$

が成り立つ.

証明. (12) 式より,

$$Y_n'(y) = \mu_n \frac{\sinh(\mu_n(d+y)) + G\mu_n \cosh(\mu_n(d+y))}{\cosh(\mu_n d) + G\mu_n \sinh(\mu_n d)}$$

が成り立つ. あとは補題 1 の証明と同様の議論をすればよい. □

(13) 式と補題 2 から次の系が従う.

系 2. $m \in \mathbb{N}$ とする. (12) 式で定義される関数 Y_n について, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ と任意の $y_0 \in [-d, 0]$ に対して

$$\max_{y \in [-d, y_0]} |Y_n^{(2m-1)}(y)| = Y_n^{(2m-1)}(y_0) = \mu_n^{2(m-1)} Y_n'(y_0) \leq C |\mu_n|^{2m-1} e^{|\mu_n| y_0}$$

が成り立つ.

補題 3. (8) 式で定義される定数 θ_n について,

$$\overline{\theta} := \sup_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} |\theta_n| < \infty$$

が成り立つ.

証明. $\theta_{-n} = -\theta_n$ より, $n > 0$ における θ_n の上限を考えれば十分である. 今, $z = \mu_n$ とおき, 関数

$$\theta(z) := \frac{\sinh(dz) + Gz\cosh(dz)}{\cosh(dz) + Gz\sinh(dz)}$$

の $z > 0$ における上限を考える. 明らかに関数 $\theta(z)$ は半区間 $(0, \infty)$ 上の連続関数である. また,

$$\lim_{z \downarrow 0} \theta(z) = 0, \quad \lim_{z \to \infty} \theta(z) = 1$$

であるから,

$$1 \leq \sup_{z>0} |\theta(z)| < \infty$$

が成り立つ. したがって,

$$\overline{\theta} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\theta(\mu_n)| \leq \sup_{z>0} |\theta(z)| < \infty$$

が成り立つ. □

補足 2. 関数 $\theta(z)$ の挙動については, もう少し詳しいことが分かる. $\theta(z)$ を微分すると,

$$\theta'(z) = \frac{d + G - G^2 dz^2}{(\cosh(dz) + Gz\sinh(dz))^2}$$

が得られる. よって,

$$z_* := \sqrt{\frac{d+G}{G^2 d}} = \frac{1}{G}\sqrt{1 + \frac{G}{d}}$$

とおけば, 関数 $\theta(z)$ は区間 $(0, z_*)$ で単調増加し, 区間 (z_*, ∞) で単調減少することが分かる. 特に,

$$\sup_{z>0} |\theta(z)| = \max_{z>0} \theta(z) = \theta(z_*) > \lim_{z \to \infty} \theta(z) = 1$$

である. また, この評価から $\overline{\theta} > 1$ であることも分かる.

補題 3 の証明から, 次の評価も得られる.

補題 4. (8) 式で定義される定数 θ_n について,

$$\underline{\theta} := \inf_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} |\theta_n| = \min\{\theta_1, 1\} > 0$$

が成り立つ.

以上の準備を踏まえて, 無限和 (11) の収束および項別微分可能性を議論する.

定理 5. 無限和 (11) の係数 F_n, H_n が

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |F_n| < \infty, \qquad \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} |H_n||n|^{-1/2} < \infty \tag{14}$$

を満たすと仮定する. このとき, 無限和 (11) は $[0, T] \times \overline{\Omega}$ 上絶対一様収束する.

証明. $|\omega_n| \geq \sqrt{2\pi g\underline{\theta} n/L}$ であるから, これにより,

$$\sup_{(t,x,y)\in[0,T]\times\overline{\Omega}} \left|(F_0+H_0t)X_0(x) + \sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\left(F_n\cos(\omega_n t) + \frac{H_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right)Y_n(y)X_n(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{L}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|F_n| + |H_0|T + \sqrt{\frac{L}{2\pi g\underline{\theta}}}\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}|H_n||n|^{-1/2}\right) < \infty$$

である. よって, 無限和 (11) は $[0,T]\times\overline{\Omega}$ 上一様絶対収束する. □

系 3. 無限和 (11) の係数 F_n, H_n が仮定 (14) を満たすとき, 無限和 (11) で定義される $\Phi(t;x,y)$ は $[0,T]\times\overline{\Omega}$ 上連続である.

定理 6. 無限和 (11) の係数 F_n, H_n が仮定 (14) を満たすとする. このとき, 任意の $y_0 \in (-d, 0)$ に対して, 無限和 (11) は $[0,T]\times[0,L]\times[-d,y_0]$ で C^∞ 級である.

証明. $y_0 \in (-d,0)$ を 1 つ取り, $\Omega_{y_0} \equiv \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<L, -d<y<y_0\}$ とする.

まずは t についての項別微分可能性を確認する. 無限和 (11) を t について k 回形式的に項別微分すると,

$$\frac{\partial^k\Phi}{\partial t^k}(t;x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\left(\omega_n^k F_n\cos^{(k)}(\omega_n t) + \omega_n^{k-1}H_n\sin^{(k)}(\omega_n t)\right)Y_n(y)X_n(x)$$

が得られる. $|\omega_n| \leq \sqrt{2\pi g\overline{\theta} n/L}$ に注意してこの右辺を評価すると, 補題 1 より

$$\sup_{(t,x,y)\in[0,T]\times\overline{\Omega_{y_0}}}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\left(\omega_n^k F_n\cos^{(k)}(\omega_n t) + \omega_n^{k-1}H_n\sin^{(k)}(\omega_n t)\right)Y_n(y)X_n(x)\right|$$

$$\leq C_k\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|F_n||n|^{k/2}e^{|\mu_n|y_0} + \sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}|H_n||n|^{(k-1)/2}e^{|\mu_n|y_0}\right) < \infty$$

と評価される. ただし, C_k は k に依存する定数である. したがって, 無限和 (11) は $[0,T]\times\overline{\Omega_{y_0}}$ において t について k 回項別微分可能であり, 偏導関数 $\frac{\partial^k\Phi}{\partial t^k}$ も $[0,T]\times\overline{\Omega_{y_0}}$ 上連続である.

次に, x についての項別微分可能性を確認する. 無限和 (11) を x について k 回項別微分を施すと,

$$\frac{\partial^k\Phi}{\partial x^k}(t;x,y) = i^k\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\mu_n^k\left(F_n\cos(\omega_n t) + \frac{H_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right)Y_n(y)X_n(x)$$

となるが, この右辺は

$$\sup_{(t,x,y)\in[0,T]\times\overline{\Omega_{y_0}}}\left|i^k\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\mu_n^k\left(F_n\cos(\omega_n t) + \frac{H_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right)Y_n(y)X_n(x)\right|$$

$$\leq C_k\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|F_n||n|^k e^{|\mu_n|y_0} + \sum_{n\in\mathbb{Z}}|H_n||n|^{k-1/2}e^{|\mu_n|y_0}\right) < \infty$$

と評価される. したがって, 無限和 (11) は x について k 回項別微分可能で, 偏導関数 $\frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k}$ は $[0,T]\times\overline{\Omega_{y_0}}$ 上連続である.

最後に, y についての項別微分可能性を確認する. 無限和 (11) を y について k 回項別微分を施すと,

$$\frac{\partial^k \Phi}{\partial y^k}(t;x,y)=\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\left(F_n\cos(\omega_n t)+\frac{H_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right)Y_n^{(k)}(y)X_n(x)$$

となるが, この右辺は系 1 および 系 2 より

$$\begin{aligned}&\sup_{(t,x,y)\in[0,T]\times\overline{\Omega_{y_0}}}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\left(F_n\cos(\omega_n t)+\frac{H_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right)Y_n^{(k)}(y)X_n(x)\right|\\ \le & C_k\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|F_n||n|^k e^{|\mu_n|y_0}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}|H_n||n|^{k-1/2}e^{|\mu_n|y_0}\right)<\infty\end{aligned}$$

と評価される. したがって, 無限和 (11) は $[0,T]\times\overline{\Omega_{y_0}}$ において y について k 回項別微分可能で, 偏導関数 $\frac{\partial^k \Phi}{\partial y^k}$ は $[0,T]\times\overline{\Omega_{y_0}}$ 上連続である.

以上より, 仮定 (14) の下で無限和 (11) は t, x, y のそれぞれについて $[0,T]\times\overline{\Omega_{y_0}}$ で任意有限回偏微分可能であり, 偏導関数は $[0,T]\times\overline{\Omega_{y_0}}$ 上連続である. $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\partial x}$ のような他の偏導関数についても同様に議論されるので, 無限和 (11) は $[0,T]\times\overline{\Omega_{y_0}}$ で C^∞ 級である. □

補足 3. 係数 F_n, H_n について, 簡単のために (14) を仮定したが, 定理 6 の証明においてはこの仮定を緩めることができる. 任意の $k\in\mathbb{N}$ と任意の $y_0\in(-d,0)$ に対して,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|F_n||n|^k e^{|\mu_n|y_0}<\infty,\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}}|H_n||n|^{k-1/2}e^{|\mu_n|y_0}<\infty$$

が成り立てば十分である.

定理 7. 無限和 (11) の係数 F_n, H_n が

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|F_n||n|<\infty,\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}}|H_n||n|^{1/2}<\infty \tag{15}$$

を満たすと仮定する. このとき, 無限和 (11) は $[0,T]\times\overline{\Omega}$ 上で t について 2 回, y について 1 回項別微分可能で, 偏導関数 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ および $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ は $[0,T]\times\overline{\Omega}$ 上連続である.

補足 4. 係数 F_n, H_n が条件 (15) を満たすならば, これらの係数は条件 (14) も満たす.

証明. 定理 6 の証明において, $k=2$ として

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(t;x,y)=-\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\left(\omega_n^2F_n\cos(\omega_n t)+\omega_nH_n\sin(\omega_n t)\right)Y_n(y)X_n(x),$$

$$\begin{aligned}&\sup_{(t,x,y)\in[0,T]\times\overline{\Omega}}\left|-\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\left(\omega_n^2F_n\cos(\omega_n t)+\omega_nH_n\sin(\omega_n t)\right)Y_n(y)X_n(x)\right|\\ \le & C\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|F_n||n|+\sum_{n\in\mathbb{Z}}|H_n||n|^{1/2}\right)<\infty\end{aligned}$$

を得る. また, $k=1$ として

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(t;x,y)=\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\left(F_n\cos(\omega_n t)+\frac{H_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right)Y_n'(y)X_n(x),$$

$$\begin{aligned}&\sup_{(t,x,y)\in[0,T]\times\overline{\Omega}}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\left(F_n\cos(\omega_n t)+\frac{H_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right)Y_n'(y)X_n(x)\right|\\ \leq & C\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|F_n||n|+\sum_{n\in\mathbb{Z}}|H_n||n|^{1/2}\right)<\infty\end{aligned}$$

を得る. したがって, 無限和 (11) は $[0,T]\times\overline{\Omega}$ 上で t について 2 回, y について 1 回項別微分可能で, 偏導関数 $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$ および $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ は $[0,T]\times\overline{\Omega}$ 上連続である. □

以下では, 仮定 (14) および (15) の妥当性について論じる. 無限和 (11) において $t=y=0$ を代入すると,

$$\Phi(0;x,0)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}F_nX_n(x)$$

が得られる. 一方で, 初期条件より $\Phi(0;x,0)=f(x,0)$ である. よって,

$$f(x,0)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}F_nX_n(x)$$

が成り立つ. すなわち, 無限和 (11) に現れる係数 F_n は, 初期値 f の $y=0$ における x についての Fourier 係数である. ここで, 整合条件 $f(\cdot,y)\in C^2_{\#}(0,L), y\in[-d,0]$ を思い出すと,

$$|F_n|\leq\frac{\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cdot,0)\|_{L^1(0,L)}}{|n|^2}\tag{16}$$

が成り立つ. 同様に,

$$|H_n|\leq\frac{\|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\cdot,0)\|_{L^1(0,L)}}{|n|^2}\tag{17}$$

も成り立つ. よって,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|F_n|\leq|F_0|+\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cdot,0)\right\|_{L^1(0,L)}\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\frac{1}{|n|^2}<\infty,$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|H_n||n|^{-1/2}\leq\left\|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\cdot,0)\right\|_{L^1(0,L)}\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\frac{1}{|n|^{5/2}}<\infty$$

となり, 仮定 (14) を満たすことは確認できる. ところが, 評価式 (16) および (17) からだけでは, 係数 F_n と H_n が仮定 (15) を満たすかどうかは判断できない.

関数 $f\in C^m_{\#}(0,L)$ について, f_n で f の第 n Fourier モードを表すとすると, 導関数 $f^{(m)}$ が連続率 ω を持つならば,

$$|f_n|\leq\frac{\omega(2\pi/Ln)}{|n|^m}$$

が成り立つ. このことから, 初期値 f, h が仮定 (15) を満たすようにするためには, $f(\cdot,0)$, $h(\cdot,0)$ が $C^{2,\alpha}$ 級のように C^2 級より滑らかである必要がある.

参考文献

[1] Kennedy, J. F., The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels, *J. Fluid Mech.*, Vol.16, pp.521–544, 1963.

[2] 森 光太朗, ポテンシャル流を用いた反砂堆現象の数理モデルとその解析, 京都大学大学院情報学研究科修士論文, 2021.