位相遅れのある線型 Kennedy モデルの解析

川越 大輔

2021 年 5 月 14 日

$L > 0$, $d > 0$, $T > 0$ として次の領域

$$
\begin{aligned}
&\Omega \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L,\ -d < y < 0\},\\
&\Gamma_1 \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le L,\ y = 0\},\\
&\Gamma_2 \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le L,\ y = -d\},
\end{aligned}
$$

を定め, 以下の初期値境界値問題を考察する:

$$
\begin{aligned}
&\Phi(t; \cdot, y) \in C^2_{\#}(0, L), && t \in [0, T],\ y \in [-d, 0], && (1)\\
&\Delta\Phi(t; x, y) = 0, && (x, y) \in \Omega,\ t \in (0, T), && (2)\\
&\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(t; x, y) + g\frac{\partial \Phi}{\partial y}(t; x, y) = 0, && (x, y) \in \Gamma_1,\ t \in (0, T), && (3)\\
&\frac{\partial \Phi}{\partial y}(t; x, y) + G\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(t; x - \delta, y) = 0, && (x, y) \in \Gamma_2,\ t \in (0, T), && (4)\\
&\Phi(0; x, y) = f(x, y), && (x, y) \in \Omega, && (5)\\
&\frac{\partial \Phi}{\partial t}(0; x, y) = h(x, y), && (x, y) \in \Omega. && (6)
\end{aligned}
$$

ただし, 初期値 f, h は次の整合条件を満たすものとする: $f, h \in C^2(\overline{\Omega})$ は Ω 上の調和関数であり,

$$
\begin{aligned}
&f(\cdot, y), h(\cdot, y) \in C^2_{\#}(0, L), && y \in [-d, 0], && (7)\\
&\frac{\partial f}{\partial y} + G\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x - \delta, y) = 0, && (x, y) \in \Gamma_2, && (8)\\
&\frac{\partial h}{\partial y} + G\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x - \delta, y) = 0, && (x, y) \in \Gamma_2 && (9)
\end{aligned}
$$

を満たす.

この問題の解の時間発展を論じるため, 変数 x に関する周期性を利用して Fourier 級数展開し, 各モードに対して考察を行う. $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$
X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\mu_n x}, \quad \mu_n = \frac{2n\pi}{L}
$$

とし, 式 (2)–(6) および式 (8)–(9) に $\overline{X_n(x)}$ を乗じて x に関して区間 $(0,L)$ で積分することにより, 各 X_n の係数に対する偏微分方程式を導出する. 以下では次の記号を用いて方程式を記述する:

$$\Phi_n(t,y) = \int_0^L \Phi(t;x,y)\overline{X_n(x)}\,dx,$$
$$f_n(y) = \int_0^L f(x,y)\overline{X_n(x)}\,dx,$$
$$h_n(y) = \int_0^L h(x,y)\overline{X_n(x)}\,dx$$

以上の準備により, 初期値境界値問題は

$$\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial y^2}(t,y) = \mu_n^2\Phi_n(t,y), \qquad t\in(0,T),\ y\in(-d,0), \tag{10}$$
$$\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial t^2}(t,y) + g\frac{\partial\Phi_n}{\partial y}(t,y) = 0, \qquad t\in(0,T),\ y=0, \tag{11}$$
$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial y}(t,y) - G\mu_n^2 e^{-i\mu_n\delta}\Phi_n(t,y) = 0, \qquad t\in(0,T),\ y=-d, \tag{12}$$
$$\Phi_n(0,y) = f_n(y), \qquad y\in(-d,0), \tag{13}$$
$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial t}(0,y) = h_n(y), \qquad y\in(-d,0) \tag{14}$$

となる. また f_n, h_n の満たす整合条件は

$$\frac{d^2 f_n}{dy^2}(y) = \mu_n^2 f_n(y),\ y\in(-d,0), \tag{15}$$
$$\frac{d^2 h_n}{dy^2}(y) = \mu_n^2 h_n(y),\ y\in(-d,0), \tag{16}$$
$$\frac{df_n}{dy}(-d) - G\mu_n^2 e^{-i\mu_n\delta} f_n(-d) = 0, \tag{17}$$
$$\frac{dh_n}{dy}(-d) - G\mu_n^2 e^{-i\mu_n\delta} h_n(-d) = 0 \tag{18}$$

と書き下される. このとき, 整合条件 (15)–(18) を満たす f_n, h_n に対して, (10)–(14) を満たす関数 Φ_n を求めることが問題となる.

$n=0$ のときは, $f_0=F_0$, $h_0=H_0$ (定数) の場合に限り (10)–(14) の解が存在し, その解は

$$\Phi_0(t;x,y) = F_0 + H_0 t$$

と表される.

$n\neq 0$ のときは, 整合条件 (15) より, 任意定数 $f_{n,0}$, $f_{n,1}$ を用いて

$$f_n(y) = f_{n,0}\cosh(\mu_n y) + f_{n,1}\sinh(\mu_n y)$$

と表される. また, (17) から

$$\mu_n(-f_{n,0}\sinh(\mu_n d) + f_{n,1}\cosh(\mu_n d)) = G\mu_n^2 e^{-i\mu_n\delta}(f_{n,0}\cosh(\mu_n d) - f_{n,1}\sinh(\mu_n d))$$

が成立する．この式を $f_{n,0}$, $f_{n,1}$ について整理すると，

$$f_{n,0}(\sinh(\mu_n d) + G\mu_n^2 e^{-i\mu_n\delta}\cosh(\mu_n d)) = f_{n,1}(\cosh(\mu_n d) + G\mu_n^2 e^{-i\mu_n\delta}\sinh(\mu_n d)) \tag{19}$$

が得られる．$\mu_n\delta \notin \mathbb{Q}$ の時には

$$\cosh(\mu_n d) + G\mu_n^2 e^{-i\mu_n\delta}\sinh(\mu_n d) \neq 0$$

であるので, これで両辺を除すと

$$\theta_n f_{n,0} = f_{n,1}$$

となる．ただし,

$$\theta_n \equiv \frac{\sinh(\mu_n d) + G\mu_n^2 e^{-i\mu_n\delta}\cosh(\mu_n d)}{\cosh(\mu_n d) + G\mu_n^2 e^{-i\mu_n\delta}\sinh(\mu_n d)} \neq 0$$

である．$\mu_n\delta \in \mathbb{Q}$ の時には θ_n の分母が 0 になり得るが, 分母が 0 になるための n, d, δ, G の関係を明らかにするのは困難であるため, ここでは議論しない．この θ_n を用いて

$$Y_n(y) \equiv \cosh(\mu_n y) + \theta_n \sinh(\mu_n y)$$

と定めると, 双曲線関数の加法定理より

$$Y_n(y) = \frac{\cosh(\mu_n(y+d)) + G\mu_n e^{-i\mu_n\delta}\sinh(\mu_n(y+d))}{\cosh(\mu_n d) + G\mu_n e^{-i\mu_n\delta}\sinh(\mu_n d)} \tag{20}$$

となる．また,

$$f_n(y) = f_{n,0}Y_n(y)$$

と書ける．h_n についても同様の計算を行えば, 任意定数 $h_{n,0}$ を用いて

$$h_n(y) = h_{n,0}Y_n(y)$$

と表せる．

以上の考察で整合条件 (15)–(18) を満たす関数 f_n, h_n が求められたので, この結果を用いて以下では $n \neq 0$ のときの (10)–(14) を満たす関数 Φ_n について考察する．

方程式 (10) は, t をパラメタとする y についての二階常微分方程式と見なすことにより, その一般解は A_n, B_n を任意定数として

$$\Phi_n(t,y) = T_n(t)(A_n\cosh(\mu_n y) + B_n\sinh(\mu_n y))$$

によって与えられる．したがって, (12) より

$$T_n(t)\mu_n(-A_n\sinh(\mu_n d) + B_n\cosh(\mu_n d)) = T_n(t)G\mu_n^2 e^{-i\mu_n\delta}(A_n\cosh(\mu_n d) - B_n\sinh(\mu_n d))$$

が得られる．

$T_n(t) = 0$ のときは $\Phi_n(t,y) = 0$ となり, これの初期条件を考えれば $f_n(y) = h_n(y) = 0$ が従う．よって, f_n と h_n の少なくとも一方が恒等的に 0 でない場合は T_n も恒等的に 0 ではない．このとき, 上式の両辺を T_n で除せば

$$\mu_n(-A_n\sinh(\mu_n d) + B_n\cosh(\mu_n d)) = G\mu_n^2 e^{-i\mu_n\delta}(A_n\cosh(\mu_n d) - B_n\sinh(\mu_n d))$$

となるが, これを整理して $\theta_n A_n = B_n$ が得られ, (20) で表される関数 Y_n を用いると

$$\Phi_n(t,y) = A_n T_n(t) Y_n(y)$$

が得られる.

最後に $Y_n(0)=1$, $\frac{dY_n}{dy}(0)=\mu_n\theta_n$ であることに注意すると, (11) より T_n に関しての常微分方程式

$$\frac{d^2T_n}{dt^2}(t) = -g\mu_n\theta_n T_n(t) \tag{21}$$

が得られる. 常微分方程式 (11) の一般解は C_1, C_2 を任意定数として

$$T_n(t) = C_1 e^{\sqrt{-g\mu_n\theta_n}t} + C_2 e^{-\sqrt{-g\mu_n\theta_n}t}$$

と表される. ただし, $z \in \mathbb{C}$ に対して z の偏角 $\arg z$ を $\arg z \in (-\pi, \pi]$ と制限し, z の平方根 $\sqrt{z}$ を

$$\sqrt{z} := |z|^{1/2} e^{i(\arg z)/2}$$

で定義する.

初期条件 (13)–(14) から

$$\begin{aligned}\Phi_n(0,y) =& A_n T_n(0) Y_n(y) = f_n(y) = f_{n,0} Y_n(y),\\ \frac{\partial\Phi}{\partial t}(0,y) =& A_n \frac{dT_n}{dt}(0) Y_n(y) = h_n(y) = h_{n,0} Y_n(y)\end{aligned}$$

であるので, 連立方程式

$$\begin{cases} A_n(C_1 + C_2) = f_{n,0}, \\ A_n\sqrt{-g\mu_n\theta_n}(C_1 - C_2) = h_{n,0} \end{cases}$$

が得られる. これを解くと

$$A_n C_1 = \frac{1}{2}\left(f_{n,0} + \frac{h_{n,0}}{\sqrt{-g\mu_n\theta_n}}\right), \quad A_n C_2 = \frac{1}{2}\left(f_{n,0} - \frac{h_{n,0}}{\sqrt{-g\mu_n\theta_n}}\right)$$

となり, これを代入すれば

$$\Phi_n(0,y) = \frac{1}{2}\left(f_{n,0} + \frac{h_{n,0}}{\sqrt{-g\mu_n\theta_n}}\right) e^{\sqrt{-g\mu_n\theta_n}t} Y_n(y) + \frac{1}{2}\left(f_{n,0} - \frac{h_{n,0}}{\sqrt{-g\mu_n\theta_n}}\right) e^{-\sqrt{-g\mu_n\theta_n}t} Y_n(y)$$

が得られる.

以上の議論から, Φ_n の時間発展の解析は指数 $\pm\sqrt{-g\mu_n\theta_n}$ の実部の解析に帰着されることが分かる. $-g\mu_n\theta_n$ が負の実数であるとき, $\pm\sqrt{-g\mu_n\theta_n}$ のどちらも正の実部を持たず, Φ_n は t に関して一様に有界である. また, $-g\mu_n\theta_n$ が負の実数でない場合は $\pm\sqrt{-g\mu_n\theta_n}$ のいずれか一方の実部が正であり, 初期値の係数 $f_{n,0}$, $h_{n,0}$ の取り方によっては Φ_n は t について指数増大する.

ここで,

$$\theta_n = \frac{\sinh(\mu_n d) + G\mu_n e^{-i\mu_n\delta}\cosh(\mu_n d)}{\cosh(\mu_n d) + G\mu_n e^{-i\mu_n\delta}\sinh(\mu_n d)}$$

であることを思い出す．これを実部と虚部に分けて整理すると，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\theta_n =& \frac{(1+G^2\mu_n^2)\sinh(2\mu_n d)+2G\mu_n\cosh(2\mu_n d)\cos(\mu_n\delta)}{(1+G^2\mu_n^2)\cosh(2\mu_n d)+2G\mu_n\sinh(2\mu_n d)\cos(\mu_n\delta)+1-G^2\mu_n^2},\\
\operatorname{Im}\theta_n =& \frac{G\mu_n\sin(\mu_n\delta)}{(1+G^2\mu_n^2)\cosh(2\mu_n d)+2G\mu_n\sinh(2\mu_n d)\cos(\mu_n\delta)+1-G^2\mu_n^2}
\end{aligned}
$$

を得る．ここから，

$$
\theta_{-n}=-\overline{\theta_n},\quad \lim_{n\to\infty}\theta_n=1,\quad \lim_{n\to-\infty}\theta_n=-1,\quad \lim_{n\to\pm\infty}\operatorname{Im}\mu_n\theta_n=0
$$

が分かる．すなわち，絶対値が十分大きい n では $\pm\sqrt{-g\mu_n\theta_n}$ は純虚数に "近い" ことが分かる．

$\pm\sqrt{-g\mu_n\theta_n}$ が純虚数になるための必要条件は θ_n の虚部が 0 であること，すなわちある $m\in\mathbb{Z}$ が存在して

$$
\mu_n\delta=\frac{2n\pi}{L}\delta=m\pi
$$

が成立することである．よって，δ/L が有理数ならば，ある正の整数 k が存在して，n が k の倍数のときかつそのときに限り θ_n の虚部が 0 となる．また，δ/L が無理数の場合は任意の n に対して θ_n の虚部は 0 とならない．

以上より，$\delta>0$ のときは時間発展により解 Φ_n が指数増大するようなモード n が存在することが分かる．

謝辞

本稿の内容は森光太朗氏との討論に基づいています．

参考文献

[1] Kennedy, J. F., The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels, *J. Fluid Mech.*, Vol.16, pp.521–544, 1963.

[2] 森 光太朗, ポテンシャル流を用いた反砂堆現象の数理モデルとその解析, 京都大学大学院情報学研究科修士論文, 2021.