L^p 空間の双対性

川越 大輔

2021 年 5 月 19 日

1　イントロダクション

$(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とし, Ω は σ 有限であるとする. $1 \leq p < \infty$ に対し,

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}, \\ \|f\|_{L^p(\Omega)} &:= \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} \end{aligned}$$

とする. また,

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \|f\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\}, \\ \|f\|_{L^\infty(\Omega)} &:= \inf\{C \geq 0 \mid |f(x)| \leq C \text{ on a.e. } \Omega\} \end{aligned}$$

とする. 本稿では, 関数空間 $L^p(\Omega)$ の双対空間 $L^p(\Omega)^*$ について考察する.

2　$1 < p < \infty$ の場合

$1 < p < \infty$ の場合には, 次の定理が成り立つ.

定理 2.1 (Riesz の表現定理)**.** $1 < p < \infty$, $\varphi \in L^p(\Omega)^*$ とする. このとき, ある $u \in L^{p'}(\Omega)$ が存在して, 任意の $f \in L^p(\Omega)$ に対して

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega uf \, d\mu$$

が存在する. ただし, p' は $1/p + 1/p' = 1$ を満たす実数とする. さらに,

$$\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^p(\Omega)^*}$$

が成り立つ.

この関係をもって, $L^p(\Omega)^* = L^{p'}(\Omega)$ という.

Proof. 作用素 $T : L^{p'}(\Omega) \to L^p(\Omega)^*$ を

$$\langle Tu, f \rangle = \int_\Omega uf \, d\mu, \quad u \in L^{p'}(\Omega), f \in L^p(\Omega)$$

で定義する．Hölder の不等式より

$$|\langle Tu, f\rangle| \le \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}\|f\|_{L^p(\Omega)}$$

であるから，$\|Tu\|_{L^p(\Omega)^*} \le \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}$ である．よって，作用素 T は有界線型作用素である．また，

$$f(x) = \begin{cases} 0, & u(x) = 0, \\ |u(x)|^{p'-2}u(x), & otherwise \end{cases}$$

とおくと，

$$\int |f(x)|^p \, d\mu = \int_\Omega |u(x)|^{p'} \, d\mu < \infty,$$
$$\int_\Omega uf \, d\mu = \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'}$$

が成り立つ．よって，

$$\|Tu\|_{L^p(\Omega)^*} \ge \frac{\int_\Omega uf \, d\mu}{\|f\|_{L^p(\Omega)}} = \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

である．以上より，$\|Tu\|_{L^p(\Omega)^*} = \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}$ である．

この等式により，作用素 T は単射である．以下では，作用素 T が全射であることを見る．

まず，$\mu(\Omega) < \infty$ の場合について考察する．$\varphi \in L^p(\Omega)^*$ とする．A を Ω の可測集合とすると，$\chi_A \in L^p(\Omega)$ である．よって，写像 $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ を

$$\nu(A) := \langle \varphi, \chi_A \rangle$$

で定義することができる．このとき，φ の線型性から ν は可測空間 $(\Omega, \mathcal{M})$ 上の符号付き測度となる．また，$\mu(A) = 0$ のとき $L^p(\Omega)$ の意味で $\chi_A = 0$ が成り立つから，$\nu(A) = 0$ である．すなわち，ν は μ に対して絶対連続である．よって，Radon-Nikodym の定理より，Ω 上のある可測関数 u が存在して，任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して

$$\nu(A) = \langle \varphi, \chi_A \rangle = \int_\Omega u\chi_A \, d\mu$$

が成り立つ．φ は $L^p(\Omega)$ 上の有界線型汎関数であるから，Ω 上の任意の単関数 f に対して

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega uf \, d\mu \tag{2.1}$$

が成り立つ．さらに，Ω 上の任意の単関数 f について

$$\int_\Omega |uf| \, d\mu \le \|\varphi\|_{L^p(\Omega)^*}\|f\|_{L^p(\Omega)}$$

が成り立つ．

ここで，f として単関数 $\operatorname{sgn} u$ を取れば，$u \in L^1(\Omega)$ であることが分かる．よって，単調収束定理により任意の $f \in L^\infty(\Omega)$ に対して等式 (2.1) および

$$\int_\Omega |uf| \, d\mu \le \|\varphi\|_{L^p(\Omega)^*}\|f\|_{L^p(\Omega)}$$

が成り立つ．

次に，$u \in L^{p'}(\Omega)$ であることを示す．$\{u_n\}$ を u に概収束する単関数列であって，任意の n について $|u_n| \le |u|$ を満たすものとする．この関数列 $\{u_n\}$ に対して

$$f_n := (\operatorname{sgn} u)\left(\frac{|u_n|}{\|u_n\|_{L^{p'}(\Omega)}}\right)^{p'/p}$$

とおく．このとき，各 n に対して $f_n \in L^\infty(\Omega)$ であって，$\|f_n\|_{L^p(\Omega)} = 1$ である．さらに，$uf_n = |uf_n|$ かつ

$$\int_\Omega |u_n f_n|\, d\mu = \|u_n\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

である．これらを踏まえると，Fatou の補題より

$$\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^{p'}(\Omega)} = \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n f_n|\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |uf_n|\, d\mu \le \|\varphi\|_{L^p(\Omega)^*}$$

が成り立つ．したがって，$u \in L^{p'}(\Omega)$ である．

単関数は $L^p(\Omega)$ で稠密であるから，Hölder の不等式より等式 (2.1) が任意の $f \in L^p(\Omega)$ に対して成り立つ．これにより $\varphi = Tu$，すなわち作用素 T が全射であることが分かった．

Ω が σ 有限の場合は，$\mu(\Omega_n) < \infty$，$\Omega = \cup_n \Omega_n$ を満たす単調増大列 $\{\Omega_n\}$ を取る．$f \in L^p(\Omega)$ に対して $f_n := \chi_{\Omega_n} f$ と定めると，$f_n \in L^p(\Omega_n)$ であるから先の議論により

$$\langle \varphi, f_n \rangle = \int_{\Omega_n} u_n f_n\, d\mu$$

を任意の $f_n \in L^p(\Omega_n)$ に対して満たす関数 $u_n \in L^{p'}(\Omega_n)$ が一意に存在する．各 n について $\Omega \backslash \Omega_n$ では 0 となるように u_n を延長しておけば，$u_n \in L^{p'}(\Omega)$ であって，任意の $m \ge n$ に対して $|u_m| \ge |u_n|$ である．また，

$$\int_\Omega |u_n f_n|\, d\mu \le \|\varphi\|_{L^p(\Omega)^*} \|f_n\|_{L^p(\Omega_n)} \le \|\varphi\|_{L^p(\Omega)^*} \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

であるから，$\|u_n\|_{L^{p'}(\Omega)} \le \|\varphi\|_{L^p(\Omega)^*}$ である．よって，単調収束定理により，ある $u \in L^{p'}(\Omega)$ が存在して，任意の $f \in L^p(\Omega)$ に対して

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega uf\, d\mu$$

が成り立つ．したがって，Ω が σ 有限の場合にも作用素 T は全射である． □

系 2.2. $1 < p < \infty$ のとき，$L^p(\Omega)$ は反射的 Banach 空間である．

Proof. $1 < p < \infty$ のとき $1 < p' < \infty$ でもあるから，定理 2.1 を 2 回適用して

$$L^p(\Omega)^{**} = L^{p'}(\Omega)^* = L^p(\Omega)$$

である． □

3　$p=1$ の場合

$p=1$ の場合には, 次の定理が成り立つ.

定理 3.1 (Riesz の表現定理)**.** $\varphi \in L^1(\Omega)^*$ とする. このとき, ある $u \in L^\infty(\Omega)$ が存在して, 任意の $f \in L^1(\Omega)$ に対して

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega uf\, d\mu$$

が存在する. さらに,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^1(\Omega)^*}$$

が成り立つ.

この関係をもって, $L^1(\Omega)^* = L^\infty(\Omega)$ という.

Proof. Ω は σ 有限であるから, $\mu(\Omega_n) < \infty$, $\Omega = \cup_n \Omega_n$ を満たす単調増大列 $\{\Omega_n\}$ が取れる. この列に対して, $\chi_n := \chi_{\Omega_n}$ とおく.

まずは定理の $u \in L^\infty(\Omega)$ の一意性を示す. ある $u \in L^\infty(\Omega)$ が存在して, 任意の $f \in L^1(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega uf\, d\mu = 0$$

が成り立つと仮定する. ここで $f = \chi_n \operatorname{sgn} u$ とおけば, $f \in L^1(\Omega)$ であり,

$$\int_{\Omega_n} |u|\, d\mu = 0$$

が成り立つ. よって, u は Ω_n 上ほとんど至るところ 0 である. n は任意であったから, u は Ω 上ほとんど至るところ 0 である. したがって, 一意性が示された.

次に定理の $u \in L^\infty(\Omega)$ の存在を示す. $\{\alpha_n\}$ を正の実数列とし, Ω 上の関数 $\theta(x)$ を

$$\theta(x) := \begin{cases} \alpha_1, & x \in \Omega_1, \\ \alpha_n, & x \in \Omega_n \backslash \Omega_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

で定義する. このとき,

$$\alpha_1^2 \mu(\Omega_1) + \sum_{n=2}^\infty \alpha_n^2 \mu(\Omega_n \backslash \Omega_{n-1}) < \infty$$

を満たすように正の実数列 $\{\alpha_n\}$ を取れば, $\theta \in L^2(\Omega)$ である. また, $x \in \Omega_n$ のとき $\theta(x) \geq \min_{1 \leq k \leq n} \alpha_k > 0$ である.

ここで, $J \in L^2(\Omega)^*$ を

$$J(f) := \langle \varphi, \theta f \rangle, \quad f \in L^2(\Omega)$$

で定義する. このとき, 定理 2.1 よりある $v \in L^2(\Omega)$ が存在して, 任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して

$$\langle \varphi, \theta f \rangle = \int_\Omega vf\, d\mu \tag{3.1}$$

が成り立つ.

$x \in \Omega$ に対して $\theta(x) > 0$ であることに注意して, $u(x) := v(x)/\theta(x)$ とおく. このとき, 任意の n について $u\chi_n \in L^2(\Omega)$ が成り立つ. また, $g \in L^\infty(\Omega)$ に対して $f(x) = \chi_n(x)g(x)/\theta(x)$ とおくと, $f \in L^2(\Omega)$ であるので, (3.1) より

$$\langle \varphi, \chi_n g \rangle = \int_\Omega u\chi_n g \, d\mu \tag{3.2}$$

が成り立つ.

ここで,

$$A := \{x \in \Omega \mid |u(x)| > \|\varphi\|_{L^1(\Omega)^*}\}$$

とおく. (3.2) で $g = \chi_A \operatorname{sgn} u$ とおくと, 集合 A の定義より

$$\|\varphi\|_{L^1(\Omega)^*}\mu(A \cap \Omega_n) < \int_{A\cap\Omega_n} |u| \, d\mu \le \|\varphi\|_{L^1(\Omega)^*}\mu(A \cap \Omega_n)$$

が成り立つ. これにより $\mu(A \cap \Omega_n) = 0$ が任意の n について成り立つ, すなわちほとんど至るところの $x \in \Omega$ で $|u(x)| \le \|\varphi\|_{L^1(\Omega)^*}$ であることが分かる. したがって, $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|\varphi\|_{L^1(\Omega)^*}$ である.

$L^1(\Omega)$ 上の打ち切り作用素 T_n を

$$(T_n h)(x) := \begin{cases} h(x), & |h(x)| \le n, \\ nh(x)/|h(x)|, & |h(x)| > n \end{cases}$$

で定義する. このとき, $T_n h \in L^\infty(\Omega)$ であるから, (3.2) より任意の $h \in L^1(\Omega)$ に対して

$$\langle \varphi, \chi_n T_n h \rangle = \int_\Omega u\chi_n T_n h \, d\mu$$

が成り立つ. 関数列 $\{\chi_n T_n h\}$ は h に概収束し, 各 n について $|\chi_n T_n h| \le |h|$ が成り立つから, 優収束定理より $n \to \infty$ で

$$\langle \varphi, \chi_n T_n h \rangle \to \langle \varphi, h \rangle,$$
$$\int_\Omega u\chi_n T_n h \, d\mu \to \int_\Omega uh \, d\mu$$

が成り立つ. したがって, 任意の $h \in L^1(\Omega)$ に対して

$$\langle \varphi, h \rangle = \int_\Omega uh \, d\mu$$

が成り立つ. 以上で定理の $u \in L^\infty(\Omega)$ の存在が示された.

証明の途中で $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|\varphi\|_{L^1(\Omega)^*}$ であることを見たが, 任意の $h \in L^1(\Omega)$ に対して

$$|\langle \varphi, h \rangle| \le \int_\Omega |uh| \, d\mu \le \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|h\|_{L^1(\Omega)}$$

であるから, $\|\varphi\|_{L^1(\Omega)^*} \le \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ も成り立つ. よって, $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^1(\Omega)^*}$ である. □

次節で見るように, $L^\infty(\Omega)^*$ は $L^1(\Omega)$ と一般には一致しない. よって, $L^1(\Omega)$ は一般に反射的 Banach 空間ではない.

4　$p = \infty$ の場合

$p = \infty$ の場合もこれまでと同様に $L^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)^*$ が成り立つ．実際, $u \in L^1(\Omega)$ に対して,

$$\langle Tu, f\rangle := \int_\Omega uf\,d\mu, \quad f \in L^\infty(\Omega)$$

で作用素 $T : L^1(\Omega) \to L^\infty(\Omega)^*$ が定義できる．また, これまでと同様に任意の $u \in L^1(\Omega)$ に対して $\|Tu\|_{L^\infty(\Omega)^*} = \|u\|_{L^1(\Omega)}$ が成り立つから, 作用素 T は単射な有界線型作用素である．よって, $L^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)^*$ である．

しかし, 逆向きの包含 $L^1(\Omega) \supset L^\infty(\Omega)^*$ は一般には成立しない．このことを Ω が $\mathbb{R}^n$ の領域の場合に確認する．

$a \in \Omega$ を 1 つ取り, $C^0(\overline{\Omega})$ 上の線型汎関数 φ_a を

$$\varphi_a(f) := f(a), \quad f \in C^0(\overline{\Omega})$$

で定義する．この時, 任意の $f \in C^0(\overline{\Omega})$ に対して $|\varphi_a(f)| \le \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ であるから, Hahn-Banach の拡張定理によりある $\varphi \in L^\infty(\Omega)^*$ が存在して, 任意の $f \in C^0(\overline{\Omega})$ に対しては $\langle \varphi, f\rangle = f(a)$ が成り立つ．

この $\varphi \in L^\infty(\Omega)^*$ に対しては,

$$\langle \varphi, f\rangle = \int_\Omega uf\,d\mu \tag{4.1}$$

を任意の $f \in L^\infty(\Omega)$ で満たすような $u \in L^1(\Omega)$ が存在しないことを示す．このような $u \in L^1(\Omega)$ が存在したと仮定すると, $f(a) = 0$ を満たす任意の $f \in C^0(\overline{\Omega})$ に対して

$$\int_\Omega uf\,d\mu = 0$$

が成り立つ．変分法の基本補題により, u は $\Omega\backslash\{a\}$ のほとんど至るところで 0 であるが, $\mu(\{a\}) = 0$ であるので, 結局 Ω のほとんど至るところで 0 である．これにより任意の $f \in L^\infty(\Omega)$ に対して

$$\langle \varphi, f\rangle = \int_\Omega uf\,d\mu = 0$$

であるが, これは $f(a) \neq 0$ なる $f \in C^0(\overline{\Omega})$ に対して $\langle \varphi, f\rangle = f(a) \neq 0$ となることに矛盾する．よって, (4.1) を任意の $f \in L^\infty(\Omega)$ で満たすような $u \in L^1(\Omega)$ は存在しない．

参考文献

[1] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, (2011).

[2] 黒田 成俊, 関数解析, 共立出版 (1980).