L^2 generalized solution と elliptic regularization

川越 大輔

2021 年 5 月 6 日

Ω を $\mathbb{R}^n$ の有界領域とし, その境界 $\partial\Omega$ は滑らかであると仮定する. 2 階の線型微分作用素 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L}u := -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} u + au \tag{0.1}$$

で定義する. ただし, 係数 a_{ij}, a_i および a は以下の条件を満たすものとする.

1. $a_{ij}, a_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $a \in L^\infty(\Omega)$,
2. 任意の i, j に対して $a_{ij} = a_{ji}$,
3. ある $\mu > 0$ が存在して, 任意の $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して
$$0 \le a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^2$$
がほとんど至るところの $x \in \Omega$ について成り立つ.

今, 微分作用素 $\mathcal{L}$ を, $D(\mathcal{L}) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ を定義域とする $L^2(\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ への非有界線型作用素と見なす.

定義 1. $f \in L^2(\Omega)$ とする. $u \in L^2(\Omega)$ が境界値問題

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{0.2}$$

の L^2 generalized solution であるとは，任意の $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega u\mathcal{L}^* v \, dx = \int_\Omega fv \, dx$$

を満たすことをいう．但し，$\mathcal{L}^*$ は $\mathcal{L}$ の形式的随伴作用素を表す.

補足 1. 形式的随伴作用素 $\mathcal{L}^*$ を書き下すと,

$$\mathcal{L}^* v = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} v \right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i v) + av$$

となる. 任意の $v \in H^2(\Omega)$ に対して $\mathcal{L}^* v \in L^2(\Omega)$ となるためには, $a_{ij}, a_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$ が必要である.

L^2 generalized solution の存在について, 次の定理が知られている.

定理 0.1. $H_0^1(\Omega)$ 上の双線型形式 $\mathcal{L}(\cdot,\cdot)$ を

$$\mathcal{L}(u,v) := \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + a_i u_{x_i} v + auv \right) dx$$

で定義する. ただし, a_{ij}, a_i, a は (0.1) に現れるものであり, u_{x_i} は関数 u の x_i 偏導関数を表す. このとき, ある正の定数 ν_0 が存在して任意の $u \in H_0^1(\Omega)$ に対して $\mathcal{L}(u,u) \geq \nu_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$ が成り立つならば, 任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して境界値問題 (0.2) の L^2 generalized solution u が存在する.

証明. $\epsilon > 0$ に対して, $\mathcal{L}^\epsilon := \mathcal{L} - \epsilon\Delta$ とする. また, $\mathcal{L}^\epsilon$ に対応する $H_0^1(\Omega)$ 上の双線型形式 $\mathcal{L}^\epsilon(\cdot,\cdot)$ を

$$\mathcal{L}^\epsilon(u,v) := \mathcal{L}(u,v) + \epsilon \int_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i} v_{x_i}\, dx$$

で定義する. このとき, 定理の仮定より, 任意の $u \in H_0^1(\Omega)$ に対して

$$\mathcal{L}^\epsilon(u,u) \geq \nu_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

が成り立つ. よって, 境界値問題

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\epsilon u = f, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

に対して, H^1 弱解 $u^\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ が一意に存在する. さらに,

$$\nu_0 \|u^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon \|u^\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \left| \int_\Omega f u^\epsilon\, dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \tag{0.3}$$

が成り立つ.

不等式 (0.3) の最左辺第一項に着目して, $\|u^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \nu_0^{-1} \|f\|_{L^2(\Omega)}$ を得る. この評価により, 関数列 $\{u^\epsilon\}_{\epsilon>0}$ は $L^2(\Omega)$ において一様に有界であるから, ある関数 $u \in L^2(\Omega)$ に弱収束する部分列 $\{u^{\epsilon_n}\}$ が存在する. このとき, 再び (0.3) により,

$$\epsilon_n \|u^{\epsilon_n}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u^{\epsilon_n}\|_{L^2(\Omega)} \leq \nu_0^{-1} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2$$

を得る. よって, 任意の $v \in H_0^1(\Omega)$ に対して

$$\epsilon_n \left| \int_\Omega \nabla u^{\epsilon_n} \cdot \nabla v\, dx \right| \leq \sqrt{\frac{\epsilon_n}{\nu_0}} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{0.4}$$

が成り立つ.

ところで, u^{ϵ_n} は境界値問題

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{\epsilon_n} u = f, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

の H^1 弱解であったから, 任意の $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ に対して

$$\epsilon_n \int_\Omega \nabla u^{\epsilon_n} \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega u^{\epsilon_n} \mathcal{L}^* v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

が成り立つ. $\epsilon_n \downarrow 0$ とすると, 左辺第一項は (0.4) より 0 に収束し, 左辺第二項は弱収束の定義より

$$\int_\Omega u \mathcal{L}^* v \, dx$$

に収束する. したがって, 任意の $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega u \mathcal{L}^* v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

が成り立つ. すなわち, $\{u^{\epsilon_n}\}$ の弱収束極限 $u \in L^2(\Omega)$ は L^2 generalized solution である. $\square$

補足 2. 定理 0.1 の証明のように, 元の微分作用素 $\mathcal{L}$ に $-\epsilon\Delta$ を加えて方程式を楕円型にして境界値問題を解き, $\epsilon \downarrow 0$ の極限を取って元の境界値問題の解を構成する方法を elliptic regularization と呼ぶ.

参考文献

[1] O. A. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Applied Mathematical Sciences 49, Springer-Verlag, New York (1985) (Original Russian edition published by Nauka, Moscow (1973)).