1次元移流方程式に対する elliptic regularization による誤差

川越 大輔

2021 年 8 月 6 日

1 イントロダクション

1 次元移流方程式の境界値問題

$$\begin{cases} a(x)u'(x) + b(x)u(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

を考える．ただし, $a \in C^1([0,1])$, $a_0 := \min_{x\in[0,1]} a(x) > 0$, $b \in C^0([0,1])$, $f \in L^2(0,1)$ とする．境界値問題 (1.1) の (H^1) 解は

$$u(x) = \int_0^x \exp\left(B(y) - B(x)\right) \frac{f(y)}{a(y)}\, dy \tag{1.2}$$

である．ただし,

$$B(x) := \int_0^x \frac{b(t)}{a(t)}\, dt$$

とおいた．

境界値問題 (1.1) に対して, elliptic regularization を施すと, 境界値問題

$$\begin{cases} -\epsilon u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

が得られる [3]．ただし, $\epsilon > 0$ とする．境界値問題 (1.3) の解 $u_{\epsilon,D}$ は境界値問題 (1.1) の解 u に $L^2(0,1)$ で弱収束することが知られている [3] が, 境界値問題 (1.3) では境界値問題 (1.1) と比較して $x = 1$ で付加的な条件がついており, これに起因して $x = 1$ の近傍で近似の精度が低下する．この問題を緩和するために, $x = 1$ での境界条件を Dirichlet 条件から Neumann 条件に変更した境界値問題

$$\begin{cases} -\epsilon u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

を考えることが提案されている．

本稿では, $a, b, f \in C^1([0,1])$ の場合に限って差の L^2 評価を行い, $\epsilon \downarrow 0$ としたとき適当な仮定下では境界値問題 (1.4) の解 $u_{\epsilon,N}$ のほうが境界値問題 (1.3) の解 $u_{\epsilon,D}$ よりも速くに元の境界値問題 (1.1) の解 u に収束することを報告する．

2 u と $u_{\epsilon,D}$ の L^2 誤差評価

本節では, Kellog, Tsan [2] のアイデアを基に, 2 つの境界値問題 (1.1), (1.3) の解の差の L^2 評価を行う. 低階項を非斉次項と見なせば, 境界値問題 (1.1), (1.3) の解 u, $u_{\epsilon,D}$ はそれぞれ積分方程式

$$u(x) = \int_0^x a(y)^{-1}(f(y) - b(y)u(y))\, dy, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} u_{\epsilon,D}(x) = &- \epsilon^{-1} \int_0^x \int_0^y \exp\left(\epsilon^{-1}(A(y) - A(t))\right)(f(t) - b(t)u_{\epsilon,D}(t))\, dtdy \\ &+ \epsilon^{-1} E_{A,\epsilon}^{-1} \int_0^1 \int_0^y \exp\left(\epsilon^{-1}(A(y) - A(t))\right)(f(t) - b(t)u_{\epsilon,D}(t))\, dtdy \\ &\times \int_0^x \exp\left(\epsilon^{-1}A(y)\right)\, dy \end{aligned} \tag{2.2}$$

を満たす. ただし,

$$A(x) := \int_0^x a(t)\, dt, \quad E_{A,\epsilon} := \int_0^1 \exp\left(\epsilon^{-1}A(y)\right)\, dy$$

とおいた. 以下では, 積分方程式 (2.1), (2.2) の解の差の L^2 評価を行う.

定理 2.1. $a, b, f \in C^1([0,1])$ かつ次を仮定する: ある $\epsilon_0 > 0$, $0 \le \alpha < 1$, $C > 0$ が存在して, 任意の $0 < \epsilon < \epsilon_0$ に対して $\|\{a^{-1}(f - bu_{\epsilon,D})\}'\|_{L^\infty(0,1)} \le C\epsilon^{-\alpha}$ が成り立つ. このとき, ある $\epsilon^* > 0$ とある $C > 0$ が存在して, 任意の $0 < \epsilon < \epsilon^*$ に対して次が成り立つ:

1. $0 \le \alpha \le 1/2$ のとき, $\|u - u_{\epsilon,D}\|_{L^2(0,1)} \le C\epsilon^{1/2}$,

2. $1/2 < \alpha < 1$ のとき, $\|u - u_{\epsilon,D}\|_{L^2(0,1)} \le C\epsilon^{1-\alpha}$.

証明. 部分積分により

$$\begin{aligned} &\epsilon^{-1} \int_0^x \int_0^y \exp\left(\epsilon^{-1}(A(y) - A(t))\right)(f(t) - b(t)u_{\epsilon,D}(t))\, dtdy \\ &= - \int_0^x a(y)^{-1}(f(y) - b(y)u_{\epsilon,D}(y))\, dy + a(0)^{-1}f(0) \int_0^x \exp\left(\epsilon^{-1}A(y)\right)\, dy \\ &\quad + \int_0^x \int_0^y \exp\left(\epsilon^{-1}(A(y) - A(t))\right)\{a(t)^{-1}(f(t) - b(t)u_{\epsilon,D}(t))\}'\, dtdy \end{aligned}$$

が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned} u_{\epsilon,D}(x) = &\int_0^x a(y)^{-1}(f(y) - b(y)u_{\epsilon,D}(y))\, dy \\ &- \left(\int_0^1 a(y)^{-1}(f(y) - b(y)u_{\epsilon,D}(y))\, dy\right) E_{A,\epsilon}^{-1} \int_0^x \exp\left(\epsilon^{-1}A(y)\right)\, dy \\ &+ E_{A,\epsilon}^{-1} \left\{ \int_0^x \int_0^1 \int_0^y \exp\left(\epsilon^{-1}(A(z) + A(y) - A(t)\right) \right. \\ &\qquad \times \{a(t)^{-1}(f(t) - b(t)u_{\epsilon,D}(t))\}'\, dtdydz \\ &\left. \quad - \int_0^1 \int_0^x \int_0^y \exp\left(\epsilon^{-1}(A(z) + A(y) - A(t)\right)\{a(t)^{-1}(f(t) - b(t)u_{\epsilon,D}(t))\}'\, dtdydz \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^x a(y)^{-1}(f(y) - b(y)u_{\epsilon,D}(y))\,dy - u(1)E_{A,\epsilon}^{-1}\int_0^x \exp\left(\epsilon^{-1}A(y)\right)\,dy \\
&\quad - E_{A,\epsilon}^{-1}\int_0^1 a(y)^{-1}b(y)(u(y) - u_{\epsilon,D}(y))\,dy\int_0^x \exp\left(\epsilon^{-1}A(y)\right)\,dy \\
&\quad + E_{A,\epsilon}^{-1}\int_0^x\int_0^1\int_z^y \exp\left(\epsilon^{-1}(A(z) + A(y) - A(t)\right) \\
&\qquad \times \{a(t)^{-1}(f(t) - b(t)u_{\epsilon,D}(t))\}'\,dtdydz
\end{aligned}
$$

と変形できる. ただし最後の式変形では, 積分

$$
\int_0^1\int_0^x\int_0^y \exp\left(\epsilon^{-1}(A(z) + A(y) - A(t))\right)\{a(t)^{-1}(f(t) - b(t)u_{\epsilon,D}(t))\}'\,dtdydz
$$

の y と z を入れ換えて, 前の積分との差を取った. よって,

$$
\begin{aligned}
u(x) - u_{\epsilon,D}(x) = &\int_0^x b(y)(u_{\epsilon,D}(y) - u(y))\,dy + u(1)E_{A,\epsilon}^{-1}\int_0^x \exp\left(\epsilon^{-1}A(y)\right)\,dy \\
&+ E_{A,\epsilon}^{-1}\int_0^x \exp\left(\epsilon^{-1}A(y)\right)\,dy\int_0^1 a(y)^{-1}b(y)(u(y) - u_{\epsilon,D}(y))\,dy \\
&- E_{A,\epsilon}^{-1}\int_0^x\int_0^1\int_z^y \exp\left(\epsilon^{-1}(A(z) + A(y) - A(t)\right) \\
&\quad \times \{a(t)^{-1}(f(t) - b(t)u_{\epsilon,D}(t))\}'\,dtdydz
\end{aligned}
$$

が成り立つ. この両辺を 2 乗すれば,

$$
|u(x) - u_{\epsilon,D}(x)|^2 \le \beta(x) + 4\|b\|_{L^2(0,1)}^2\int_0^x |u(y) - u_{\epsilon,D}(y)|^2\,dy
$$

が得られる. ただし,

$$
\begin{aligned}
\beta(x) :=&4u(1)^2E_{A,\epsilon}^{-2}\left(\int_0^x \exp\left(\epsilon^{-1}A(y)\right)\,dy\right)^2 \\
&+ 4E_{A,\epsilon}^{-2}\left(\int_0^x \exp\left(\epsilon^{-1}A(y)\right)\,dy\right)^2\|b/a\|_{L^2(0,1)}^2\|u - u_{\epsilon,D}\|_{L^2(0,1)}^2 \\
&+ 4E_{A,\epsilon}^{-2}\left(\int_0^x\int_0^1\int_z^y \exp\left(\epsilon^{-1}(A(z) + A(y) - A(t)\right)\right. \\
&\quad \left.\times\ \{a(t)^{-1}(f(t) - b(t)u_{\epsilon,D}(t))\}'\,dtdydz\right)^2
\end{aligned}
$$

である.

関数 β は区間 $[0,1]$ 上で単調非減少であるから, Gronwall の不等式より,

$$
|u(x) - u_{\epsilon,D}(x)|^2 \le \beta(x)\exp\left(4\|b\|_{L^2(0,1)}^2x\right) \le \exp\left(4\|b\|_{L^2(0,1)}^2\right)\beta(x)
$$

が成り立つ. これを積分して,

$$
\|u - u_{\epsilon,D}\|_{L^2(0,1)}^2 \le C\int_0^1 \beta(x)\,dx
$$

を得る．ここで, C は ϵ に依存しない定数であり, 以下では必要に応じて C を取り換えるものとする．

変数変換 $Y = A(y)$ を考えると，

$$\int_0^x \exp\left(\epsilon^{-1}A(y)\right)\,dy = \int_0^{A(x)} \exp\left(\epsilon^{-1}Y\right) a(y(Y))^{-1}\,dY \le a_0^{-1}\epsilon\exp\left(\epsilon^{-1}A(x)\right),$$

および

$$\int_0^x \exp\left(\epsilon^{-1}A(y)\right)\,dy \ge \|a\|_{L^\infty(0,1)}^{-1}\epsilon\left(\exp\left(\epsilon^{-1}A(x)\right)-1\right)$$

が成り立つ．よって，

$$E_{A,\epsilon}^{-1} \le \|a\|_{L^\infty(0,1)}\epsilon^{-1}\left(\exp\left(\epsilon^{-1}A(1)\right)-1\right)^{-1} = \|a\|_{L^\infty(0,1)}\epsilon^{-1}\left(\exp\left(\epsilon^{-1}\|a\|_{L^1(0,1)}\right)-1\right)^{-1}$$

が成り立つ．

これらの評価を用いて，

$$\begin{aligned}
&E_{A,\epsilon}^{-2}\int_0^1\left(\int_0^x \exp\left(\epsilon^{-1}A(y)\right)\,dy\right)^2 dx\\
\le&\|a\|_{L^\infty(0,1)}^2\epsilon^{-2}\left(\exp\left(\epsilon^{-1}\|a\|_{L^1(0,1)}\right)-1\right)^{-2}\int_0^1 a_0^{-2}\epsilon^2\exp\left(2\epsilon^{-1}A(x)\right)\,dx\\
\le&\frac{\|a\|_{L^\infty(0,1)}^2}{2a_0^3}\frac{1}{\left(1-\exp\left(-\epsilon^{-1}\|a\|_{L^1(0,1)}\right)\right)^2}\epsilon,\\
&E_{A,\epsilon}^{-2}\int_0^1\left(\int_0^x\int_0^1\int_z^y \exp\left(\epsilon^{-1}(A(z)+A(y)-A(t)\right)\{a(t)(f(t)-b(t)u_{\epsilon,D}(t))\}'\,dtdydz\right)^2 dx\\
\le&a_0^{-2}\epsilon^2E_{A,\epsilon}^{-2}\|\{a^{-1}(f-bu_{\epsilon,D})\}'\|_{L^\infty(0,1)}^2\int_0^1\left(xE_{A,\epsilon}+\int_0^x(2z-1)\exp\left(\epsilon^{-1}A(z)\right)\,dz\right)^2 dx\\
\le&\frac{4\|\{a^{-1}(f-bu_{\epsilon,D})\}'\|_{L^\infty(0,1)}^2}{a_0^2}\epsilon^2
\end{aligned}$$

が得られる．したがって, $\exp\left(-\epsilon_1^{-1}\|a\|_{L^1(0,1)}\right) < 1$ が成り立つように $\epsilon_1 > 0$ を小さく取れば, 任意の $0 < \epsilon < \epsilon_1$ について

$$\|u-u_{\epsilon,D}\|_{L^2(0,1)}^2 \le \int_0^1 \beta(x)\,dx \le C(\epsilon+\epsilon\|u-u_{\epsilon,D}\|_{L^2(0,1)}^2+\epsilon^{2-2\alpha})$$

が成り立つ．さらに, 右辺の $\|u-u_{\epsilon,D}\|_{L^2(0,1)}^2$ の係数が 1 より小さくなるように $\epsilon=\epsilon^* < \epsilon_1$ を取れば, この項を左辺に移項して

$$\|u-u_{\epsilon,D}\|_{L^2(0,1)} \le C(\epsilon+\epsilon^{2-2\alpha})^{1/2}$$

が任意の $0 < \epsilon < \epsilon^*$ に対して成り立つことが分かる．この評価から定理 2.1 が従う． □

補足 1. 定理 2.1 の評価に現れる定数 C は元の境界値問題 (1.1) の解 u の $x=1$ における値 $u(1)$ に依存するが, $u(1)=\lim_{x\uparrow 1}u(x)$ は有限確定する．このことは, 解 u の表示式 (1.2) で $x\uparrow 1$ とすれば分かる．

補足 2. $\epsilon \downarrow 0$ のとき, $x=1$ の近傍で $O(\epsilon)$ の境界層が発生することが知られている (要出典). このことから, $x=1$ の $O(\epsilon)$ 近傍では $u'_{\epsilon,D}(x)=O(\epsilon^{-1})$ と挙動することが予想される. この挙動を仮定すれば $\|u'_{\epsilon,D}\|_{L^2(0,1)}=O(\epsilon^{-1/2})$ となるが, このことは少なくとも elliptic regularization の議論から得られる評価とは矛盾しない. 一方で, 先の議論で $\alpha=1$ の場合を考えれば, $u_{\epsilon,D}$ が u に $L^2(0,1)$ で強収束するかどうかは非自明となる.

例 1. $a=f=1$, $b=0$ の場合, 境界値問題 (1.3) の解 $u_{\epsilon,D}$ は

$$u_{\epsilon,D}(x)=x-\left(e^{\epsilon^{-1}x}-1\right)\left(e^{\epsilon^{-1}}-1\right)^{-1}$$

となる. このとき,

$$u'_{\epsilon,D}(x)=1-\epsilon^{-1}\left(e^{\epsilon^{-1}x}-1\right)\left(e^{\epsilon^{-1}}-1\right)^{-1}$$

である. よって, $0<\epsilon<1$ のとき,

$$\max_{x\in[0,1]}|u'_{\epsilon,D}(x)|=-u'_{\epsilon,D}(1)=\epsilon^{-1}-1=O(\epsilon^{-1})$$

である. また,

$$\int_0^1|u'_{\epsilon,D}(x)|^2\,dx=-1+\frac{5}{2}\epsilon^{-1}-\epsilon^{-1}\left(e^{\epsilon^{-1}}-1\right)^{-1}+\epsilon^{-2}\left(e^{\epsilon^{-1}}-1\right)^{-2}$$

であるから, $\epsilon\downarrow 0$ のとき $\|u'_{\epsilon,D}\|_{L^2(0,1)}=O(\epsilon^{1/2})$ である.

なお, この例では $\|\{a^{-1}(f-bu_{\epsilon,D})\}'\|_{L^\infty(0,1)}=\|(a^{-1}f)'\|_{L^\infty(0,1)}\le C$ であるので, 定理 2.1 において $\alpha=0$ と取ることができる. よって, 導関数に特異性が生じるものの, 定理 2.1 で示唆される収束のオーダーが得られている. また, 低階項の寄与を吟味しなければならないが, 定理 2.1 で示唆される収束のオーダーが最良であると期待される.

3 u と $u_{\epsilon,N}$ の L^2 誤差評価

本節では前節と同様にして 2 つの解の差の L^2 評価を行う. 低階項を非斉次項と見なせば, 境界値問題 (1.4) の解 $u_{\epsilon,N}$ は積分方程式

$$u_{\epsilon,N}(x)=\epsilon^{-1}\int_0^x\int_y^1\exp\left(\epsilon^{-1}(A(y)-A(t))\right)(f(t)-b(t)u_{\epsilon,N}(t))\,dtdy \tag{3.1}$$

を満たす. 以下では, 積分方程式 (2.1), (3.1) の解の差の L^2 評価を行う.

定理 3.1. $a,b,f\in C^1([0,1])$ かつ次を仮定する: ある $\epsilon_0>0$, $0\le\alpha<1$, $C>0$ が存在して, 任意の $0<\epsilon<\epsilon_0$ に対して $\|\{a^{-1}(f-bu_{\epsilon,N})\}'\|_{L^\infty(0,1)}\le C\epsilon^{-\alpha}$ が成り立つ. このとき, ある $\epsilon^*>0$ とある $C>0$ が存在して, 任意の $0<\epsilon<\epsilon^*$ に対して

$$\|u-u_{\epsilon,N}\|_{L^2(0,1)}+|u(1)-u_{\epsilon,N}(1)|\le C\epsilon^{1-\alpha}$$

が成り立つ.

証明. 先の議論のように部分積分を施せば, $f(1)=a(1)u'(1)+b(1)u(1)$ に注意して

$$
\begin{aligned}
u(x)-u_{\epsilon,N}(x)=&\int_0^x a(y)^{-1}b(y)(u(y)-u_{\epsilon,N}(y))\,dy\\
&+\{a(1)^{-1}b(1)(u(1)-u_{\epsilon,N}(1))+u'(1)\}\int_0^x \exp\left(\epsilon^{-1}(A(y)-A(1))\right)\,dy\\
&-\int_0^x\int_y^1 \exp\left(\epsilon^{-1}(A(y)-A(t))\right)\{a(t)^{-1}(f(t)-b(t)u_{\epsilon,N}(t))\}'\,dt\,dy
\end{aligned}
$$

が得られる. $\|\{a^{-1}(f-bu_{\epsilon,N})\}'\|_{L^\infty(0,1)}\le C\epsilon^{-\alpha}$ の仮定を利用すれば,

$$
\begin{aligned}
|u(x)-u_{\epsilon,N}(x)|\le&\int_0^x a(y)^{-1}|b(y)||u(y)-u_{\epsilon,N}(y)|\,dy\\
&+\{a(1)^{-1}|b(1)||u(1)-u_{\epsilon,N}(1)|+|u'(1)|\}\exp\left(\epsilon^{-1}a_0(x-1)\right)a_0^{-1}\epsilon\\
&+Ca_0^{-1}\epsilon^{1-\alpha}x
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

と評価できる.

まず, $|u(1)-u_{\epsilon,N}(1)|$ を評価する. 以下の議論では, u, ϵ, x には依存しない定数をまとめて C と表すこととする. 不等式 (3.2) で $x=1$ とおけば,

$$
\begin{aligned}
|u(1)-u_{\epsilon,N}(1)|\le&\int_0^1 a(y)^{-1}|b(y)||u(y)-u_{\epsilon,N}(y)|\,dy\\
&+\{a(1)^{-1}|b(1)||u(1)-u_{\epsilon,N}(1)|+|u'(1)|\}a_0^{-1}\epsilon+Ca_0^{-1}\epsilon^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

となる. ここで,

$$
a_0^{-2}\|b\|_{L^\infty(0,1)}\epsilon_1<1
$$

となるように $0<\epsilon_1<\epsilon_0$ を取れば, 任意の $0<\epsilon<\epsilon_1$ に対して

$$
|u(1)-u_{\epsilon,N}(1)|\le C\left(\|b/a\|_{L^2(0,1)}\|u-u_{\epsilon,N}\|_{L^2(0,1)}+\epsilon^{1-\alpha}\right)
\tag{3.3}
$$

と評価できる.

次に, 不等式 (3.2) の辺々を 2 乗すれば,

$$
\begin{aligned}
|u(x)-u_{\epsilon,N}(x)|^2\le&2\left(\int_0^x a(y)^{-1}|b(y)||u(y)-u_{\epsilon,N}|\,dy\right)^2\\
&+C[\{|u(1)-u_{\epsilon,N}(1)|+1\}\exp\left(\epsilon^{-1}a_0(x-1)\right)\epsilon+\epsilon^{1-\alpha}x]^2\\
\le&C\gamma(x)+2\|b/a\|_{L^2(0,1)}\int_0^x|u(y)-u_{\epsilon,N}(y)|^2\,dy
\end{aligned}
$$

と評価できる. ただし,

$$
\gamma(x):=\{|u(1)-u_{\epsilon,N}(1)|^2+1\}\exp\left(2\epsilon^{-1}a_0(x-1)\right)\epsilon^2+\epsilon^{2(1-\alpha)}x^2
$$

である. 関数 $\gamma(x)$ は区間 $[0,1]$ 上連続でかつ単調非減少であるから, Gronwall の不等式より

$$
|u(x)-u_{\epsilon,N}(x)|^2\le C\gamma(x)\exp\left(2\|b/a\|_{L^2(0,1)}x\right)\le C\gamma(x)
$$

が成り立つ．これを積分すれば,

$$\|u-u_{\epsilon,N}\|_{L^2(0,1)}^2 \le C\int_0^1 \gamma(x)\,dx$$

が得られる．

ここで, 不等式 (3.3) を用いると,

$$\int_0^1 \gamma(x)\,dx \le C\left(\|u-u_{\epsilon,N}\|_{L^2(0,1)}^2\epsilon^3+\epsilon^{2(1-\alpha)}\right)$$

が成り立つ．よって, この定数 C に対して $C(\epsilon^*)^3<1$ となるように $0<\epsilon^*<\epsilon_1$ を取れば,

$$\|u-u_{\epsilon,N}\|_{L^2(0,1)} \le C\epsilon^{1-\alpha} \tag{3.4}$$

が任意の $0<\epsilon\le\epsilon^*$ について成り立つことが分かる．

最後に, 不等式 (3.4) を不等式 (3.3) に代入すれば,

$$|u(1)-u_{\epsilon,N}(1)| \le C\epsilon^{1-\alpha}$$

が成り立つことも分かる．以上より, 定理 3.1 が成立する． □

補足 3. 定理 2.1 の評価に現れる定数 C は元の境界値問題 (1.1) の解 u の導関数の $x=1$ における値 $u'(1)$ に依存するが, 一般には $u'(1)=\lim_{x\uparrow 1}u'(x)$ は有限確定しない．このことは, 元の境界値問題を u' について形式的に解いて

$$u'(x)=a(x)^{-1}(f(x)-b(x)u(x))$$

とし, $f\in L^2(0,1)$ の場合を考えれば分かる．ただし, $a,b,f\in C^1([0,1])$ の仮定下では $u'(1)$ は有限確定する．

$a,b,f\in C^1([0,1])$ のとき, ある定数 C が存在して, 境界値問題 (1.4) の解の族 $\{u_{\epsilon,N}\}_{\epsilon>0}$ に対して $\sup_{\epsilon>0}\|u_{\epsilon,N}\|_{L^2(0,1)}<C$ が成立するならば, 定理 3.1 で $\alpha=1/2$ と取れることを証明する．なお, この仮定は例えば

$$b_0 := \min_{x\in[0,1]}\left(b(x)-\frac{1}{2}a'(x)\right)>0$$

のときに満たされる．実際, 境界値問題 (1.4) の両辺に解 $u_{\epsilon,N}$ をかけて積分すると,

$$\begin{aligned}&-\int_0^1 \epsilon u''_{\epsilon,N}(x)u_{\epsilon,N}(x)\,dx+\int_0^1 a(x)u'_{\epsilon,N}(x)u_{\epsilon,N}(x)\,dx+\int_0^1 b(x)u_{\epsilon,N}(x)^2\,dx\\ &=\int_0^1 f(x)u_{\epsilon,N}(x)\,dx\end{aligned}$$

となるが, 境界条件を考慮して各積分を評価すると,

$$\begin{aligned}-\int_0^1 \epsilon u''_{\epsilon,N}(x)u_{\epsilon,N}(x)\,dx =&\epsilon\int_0^1 |u'_{\epsilon,N}(x)|^2\,dx,\\ \int_0^1 a(x)u'_{\epsilon,N}(x)u_{\epsilon,N}(x)\,dx =&a(1)u_{\epsilon,N}(1)^2-\frac{1}{2}\int_0^1 a'(x)|u_{\epsilon,N}(x)|^2\,dx,\end{aligned}$$

$$\left|\int_0^1 f(x)u_{\epsilon,N}(x)\,dx\right| \leq \|f\|_{L^2(0,1)}\|u_{\epsilon,N}\|_{L^2(0,1)}$$

となる. よって,

$$b_0\|u_{\epsilon,N}\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \|f\|_{L^2(0,1)}\|u_{\epsilon,N}\|_{L^2(0,1)},$$

すなわち $\|u_{\epsilon,N}\|_{L^2(0,1)} \leq b_0^{-1}\|f\|_{L^2(0,1)}$ が従う.

まず, 積分方程式 (3.1) の両辺を x について微分すると,

$$u'_{\epsilon,N}(x) = \epsilon^{-1}\int_x^1 \exp\left(\epsilon^{-1}(A(x)-A(t))\right)(f(t)-b(t)u_{\epsilon,N}(t))\,dt$$

が得られる. この右辺を Cauchy-Schwarz の不等式で評価すると, $\{u_{\epsilon,N}\}$ に対する仮定より

$$|u'_{\epsilon,N}(x)| \leq C\epsilon^{-1/2}$$

が任意の $0 \leq x \leq 1$ で成り立つ. よって,

$$\|u'_{\epsilon,N}\|_{L^\infty(0,1)} \leq C\epsilon^{-1/2}$$

である.

また, 任意の $0 \leq x \leq 1$ に対して

$$|u_{\epsilon,N}(x)| = \left|\int_0^x u'_{\epsilon,N}(y)\,dy\right| \leq \|u'_{\epsilon,N}\|_{L^\infty(0,1)}$$

であるから,

$$\|u_{\epsilon,N}\|_{L^\infty(0,1)} \leq C\epsilon^{-1/2}$$

も成り立つ. よって, ある $\epsilon_0 > 0$ と $C > 0$ が存在して, 任意の $0 < \epsilon < \epsilon_0$ に対して

$$\begin{aligned}\|\{a^{-1}(f-bu_{\epsilon,N})\}'\|_{L^\infty(0,1)} \leq & \|(f/a)'\|_{L^\infty(0,1)} + \|(b/a)'\|_{L^\infty(0,1)}\|u_{\epsilon,N}\|_{L^\infty(0,1)} \\ & + \|b/a\|_{L^\infty(0,1)}\|u'_{\epsilon,N}\|_{L^\infty(0,1)} \\ \leq & C\epsilon^{-1/2}\end{aligned}$$

が成り立つ. これにより, $\|u_{\epsilon,N}\|_{L^2(0,1)}$ の一様有界性を仮定すれば, 定理 3.1 において $\alpha = 1/2$ と取れることが分かる.

さらに, この仮定下では導関数 $u'_{\epsilon,N}$ の L^2 評価を導くことができる. 部分積分を利用して, $u'_{\epsilon,N}$ の表示式を

$$\begin{aligned}u'_{\epsilon,N}(x) =& a(x)^{-1}(f(x)-b(x)u_{\epsilon,N}(x)) - a(1)^{-1}(f(1)-b(1)u_{\epsilon,N}(1))\exp\left(\epsilon^{-1}(A(x)-A(1))\right) \\ & + \int_x^1 \exp\left(\epsilon^{-1}(A(x)-A(t))\right)\{a(t)^{-1}(f(t)-b(t)u_{\epsilon,N}(t))\}'\,dt\end{aligned}$$

と変形する. 定理 3.1 より,

$$\sup_{0<\epsilon<\epsilon^*}|u_{\epsilon,N}(1)| \leq |u(1)| + C(\epsilon^*)^{1/2} < C$$

であることに注意すると, 任意の $0 < \epsilon < \epsilon^*$ に対して

$$\begin{aligned}\|u'_{\epsilon,N}\|_{L^2(0,1)} \le & C\Big(\|a^{-1}(f - bu_{\epsilon,N})\|_{L^2(0,1)} + \int_0^1 \exp\left(\epsilon^{-1}A(x)\right)\, dx \\ & + \|a^{-1}(f - bu_{\epsilon,N})\|_{L^\infty(0,1)} \int_0^1 \int_x^1 \exp\left(\epsilon^{-1}(A(x) - A(t))\right)\, dt\, dx\Big)\end{aligned}$$

が成り立つ. 仮定より, 任意の $0 < \epsilon < \epsilon^*$ に対して

$$\begin{aligned}\|a^{-1}(f - bu_{\epsilon,N})\|_{L^2(0,1)} \le & C, \\ \int_0^1 \exp\left(\epsilon^{-1}A(x)\right)\, dx \le & C\epsilon, \\ \|a^{-1}(f - bu_{\epsilon,N})\|_{L^\infty(0,1)} \int_0^1 \int_x^1 \exp\left(\epsilon^{-1}(A(x) - A(t))\right)\, dt\, dx \le & C\epsilon^{1/2}\end{aligned}$$

であるから, $\|u'_{\epsilon,N}\|_{L^2(0,1)}$ は $0 < \epsilon < \epsilon^*$ で一様有界である.

4 今後の課題

この解析から, 筆者は次の 3 点に興味を持つ.

1 つ目は仮定 $\|\{a^{-1}(f - bu_{\epsilon,D})\}'\|_{L^\infty(0,1)} \le C\epsilon^{-\alpha}$ の妥当性である. 本稿では技術的な事情からやむを得ず仮定したが, b が恒等的には 0 でないときを除きこの仮定を検証することは容易ではない. この L^∞ ノルムでの仮定を L^2 ノルムに変更して議論することは難しくないので, 読者自身で評価を修正してみてほしい. なお, elliptic regularization による L^2 generalized solution の存在の議論から, 適当な仮定下では $\|u'_{\epsilon,D}\|_{L^2(0,1)} \le C\epsilon^{-1/2}$, $\|u'_{\epsilon,N}\|_{L^2(0,1)} \le C\epsilon^{-1/2}$ であることは分かるので, $\|\{a^{-1}(f - bu_{\epsilon,D})\}'\|_{L^2(0,1)} \le C\epsilon^{-1/2}$ を仮定して議論することは妥当である.

2 つ目は, 一般の a, f に対する誤差評価である. 今回は $a, b, f \in C^1([0,1])$ の場合に限定して解析を行ったが, 本来は Ladyzhenskaya [3] に従えば, $a \in W^{1,\infty}(0,1)$, $b \in L^\infty(0,1)$, $f \in L^2(0,1)$ の場合に解析を行うべきである. また, 今回は a が常に正であることを仮定したが, 符号が変わる場合も興味深い. この場合の考察は Farrell et al. [1] でなされているようである.

3 つ目は多次元の場合の誤差解析である. 今回は 1 次元であるから elliptic regularization 後の解を陽に書き下せたが, 多次元の場合は一般に書き下せない. L^2 generalized solution の定義式を利用して, 誤差 $\|u - u_{\epsilon,D}\|_{L^2(\Omega)}$ および $\|u - u_{\epsilon,N}\|_{L^2(\Omega)}$ を評価できないだろうか.

参考文献

[1] P. A. Farrell et al., Singularly perturbed convection–diffusion problems with boundary and weak interior layers, *J. Comput. Appl. Math.*, **166** (2004), pp. 133–151.

[2] R. B. Kellogg and A. Tsan, Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points, *Math. Comput.*, **32**, no. 144 (1978), pp. 1025–1039.

[3] O. A. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Applied Mathematical Sciences 49, Springer-Verlag, New York (1985) (Original Russian edition published by Nauka, Moscow (1973)).