entropy solution まとめ

川越 大輔

2023 年 2 月 13 日

概 要

本稿では, Zou [2] に基づき entropy solution の定義をまとめる.

1 Distributional solution

本稿では, 保存則

$$u_t + \mathrm{div}_x(A(u)) = 0$$

の初期値問題について考察する.

定義 1. $T > 0$ とし, $\pi_T := [0, T] \times \mathbb{R}^d$ とおく. また, $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ とする. $u \in L^\infty(\pi_T)$ が初期値問題

$$u_t + \mathrm{div}_x(A(u)) = 0, \quad u(0, x) = u^0(x) \tag{1.1}$$

の distributional solution であるとは, 任意の $f \in C_0^\infty([0, T) \times \mathbb{R}^d)$ に対して

$$\int_{\pi_T} u f_t + A(u) \cdot \nabla_x f \, dt dx + \int_{\mathbb{R}^d} u^0(x) f(0, x) \, dx = 0 \tag{1.2}$$

が成り立つことを言う.

以下では, $\tilde{\pi_T} = (0, T) \times \mathbb{R}^d$ とする.

補足 1. 初期値問題 (1.1) の古典解は distributional solution である. 逆に, C^1 級の distributional solution は古典解である.

命題 1.1. u を初期値問題 (1.1) の distributional solution とし, この u が有限枚の C^1 級曲面上を除いて π_T 上で C^1 級であるとする. さらに, それらの曲面が 2 枚以上のとき, どの 2 枚の曲面の交点も測度は 0 であると仮定する. また, (t, x) をそれらの曲面のうちの 1 枚のみに属する点とする. $\hat{n}$ を点 (t, x) におけるこの曲面の法線ベクトルとすると,

$$(u_1 - u_2, A(u_1) - A(u_2)) \cdot \hat{n} = 0 \tag{1.3}$$

が成り立つ. ただし, u_1, u_2 は曲面の片側から取られた u の点 (t, x) への極限値である. 特に $d = 1$ で解の不連続線が $x = x(t)$ とパラメータ付けされる時,

$$\dot{x}(t)(u_1 - u_2) = A(u_1) - A(u_2)$$

が成り立つ. 逆に, 関数 u が有限個の曲面上を除いて初期値問題 (1.1) を満たし, それらの曲面が 2 枚以上の場合にはどの 2 枚の曲面の交点も測度は 0 であり, 交点ではない曲面上の各点で関係式 (1.3) を満たすならば, u は distributional solution である.

補足 2. 関係式 (1.3) は Rankine-Hugoniot 条件と呼ばれる.

証明. 仮定に現れる曲面で囲まれた各領域で部分積分を行えば結論が得られる. □

例 1. $d=1$, $A(u) := u^2/2$ とおく. このとき, Rankine-Hugoniot 条件は

$$\dot{x}(t)(u_1-u_2) = A(u_1) - A(u_2) = \frac{(u_1-u_2)(u_1+u_2)}{2},$$

すなわち $\dot{x}(t) = (u_1+u_2)/2$ となる. これを踏まえれば, $u=0$ の他に

$$u_1(t,x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < t/2, \\ -1, & -t/2 < x < 0, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

も初期値 $u^0 = 0$ に対する初期値問題 (1.1) の distributional solution となる. すなわち, この問題設定では, 初期値問題 (1.1) の distributional solution は一意でない.

2 Entropy solution

例 1 で見た distributional solution の一意性の問題を解消するため, entropy solution の概念を導入する.

定義 2. 関数 $u \in L^\infty(\pi_T)$ が初期値問題 (1.1) の entropy solution であるとは, 任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u-k|) + \operatorname{sgn}(u-k)\operatorname{div}_x(A(u)) \leq 0 \tag{2.1}$$

が distribution の意味で成り立つ, すなわち $f \geq 0$ なる任意の $f \in C_0^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^d)$ に対して

$$\int_{\pi_T} |u(t,x)-k| f_t + \operatorname{sgn}(u(t,x)-k)(A(u(t,x)) - A(k)) \cdot \nabla_x f \, dtdx \geq 0 \tag{2.2}$$

が成り立ち, ある $E \subset [0,T]$ が存在して, $[0,T] \setminus E$ が測度 0 で, 任意の $t \in E$ に対して関数 $u(t,\cdot)$ がほとんど至るところの $x \in \mathbb{R}^d$ で定義され, 任意の開球 $B_R := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < R\}$ に対して

$$\lim_{t \downarrow 0, t \in E} \int_{B_R} |u(t,x) - u^0(x)| \, dx = 0 \tag{2.3}$$

が成り立つことを言う.

補足 3. 等式

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}_x(\operatorname{sgn}(u-k)(A(u)-A(k))) \\
=&\operatorname{sgn}(u-k)\operatorname{div}_x(A(u)-A(k)) + \nabla_x(\operatorname{sgn}(u-k)) \cdot (A(u)-A(k)) \\
=&\operatorname{sgn}(u-k)\operatorname{div}_x(A(u)-A(k)) + 2\delta(u-k)\nabla_x u \cdot (A(u)-A(k)) \\
=&\operatorname{sgn}(u-k)\operatorname{div}_x(A(u)-A(k))
\end{aligned}$$

に注意すれば, 不等式 (2.1) と不等式 (2.2) は確かに同値であることが分かる. ただし, δ は Dirac の delta 関数を表す.

命題 2.1. 初期値問題 (1.1) の entropy solution は distributional solution である.

証明. $f \in C_0^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^d)$, $f \geq 0$ とし, $u \in L^\infty(\pi_T)$ を初期値問題 (1.1) の entropy solution とする. このとき, $k > \|u\|_{L^\infty(\pi_T)}$ となるように $k \in \mathbb{R}$ を取れば, ほとんど至るところの $(t,x) \in \pi_T$ に対して $|u-k| = k-u$ かつ $\mathrm{sgn}(u-k) = -1$ が成り立つ. これにより, 不等式 (2.2) は

$$\int_{\pi_T} (k-u)f_t - (A(u)-A(k)) \cdot \nabla_x f \, dtdx \geq 0$$

となる. ここで, $f \in C_0^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^d)$ より,

$$\int_{\pi_T} f_t \, dtdx = -\int_{\mathbb{R}^d} f(0,x)\, dx \leq 0, \quad \int_{\pi_T} \nabla_x f \, dtdx = 0$$

が成り立つから, 先の不等式は

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi_T} uf_t + A(u)\cdot\nabla_x f\, dtdx + \int_{\mathbb{R}^d} u^0(x) f(0,x)\, dx \\
\leq &\int_{\pi_T} (u-k)f_t + (A(u)-A(k))\cdot\nabla_x f\, dtdx + \int_{\mathbb{R}^d} (u^0(x)-k) f(0,x)\, dx \\
\leq &0
\end{aligned}$$

と変形できる. また $k < -\|u\|_{L^\infty(\pi_T)}$ となるように $k \in \mathbb{R}$ を取れば, 同様にして

$$\int_{\pi_T} uf_t + A(u)\cdot\nabla_x f\, dtdx + \int_{\mathbb{R}^d} u^0(x) f(0,x)\, dx \geq 0$$

が得られる. したがって, $f \geq 0$ なる任意の $f \in C_0^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^d)$ に対して,

$$\int_{\pi_T} uf_t + A(u)\cdot\nabla_x f\, dtdx + \int_{\mathbb{R}^d} u^0(x) f(0,x)\, dx = 0$$

が成り立つ. このことから, entropy solution u が distributional solution であることが分かる. □

補足 4. 微分の連鎖律より, 関数 $u \in W^{1,1}(\pi_T)$ が初期値問題 (1.1) の distributional solution ならば,

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u-k|) + \mathrm{sgn}(u-k)\,\mathrm{div}_x(A(u)) = \mathrm{sgn}(u-k)(u_t + \mathrm{div}_x(A(u))) = 0$$

である. よって, この u は entropy solution である. しかし, 一般には distributional solution が entropy solution とは限らない.

例 2. 例 1 で考察した関数 u_1 と任意の $f \in C_0^\infty(\tilde{\pi_T})$ に対して,

$$\int_{\pi_T} |u_1| f_t + \mathrm{sgn}(u_1)\frac{u_1^2}{2} f_x \, dtdx = -\int_0^T f(t,0)\, dt$$

が成り立つ. よって, $f \geq 0$ かつ $f|_{x=0}$ が恒等的に 0 でなければ, 上式の右辺は負であり, したがって u_1 は (2.2) を満たさない. すなわち, u_1 は entropy solution ではない. もちろん, この u_1 は $W^{1,1}(\pi_T)$ には属さない.

命題 2.2. u を初期値問題 (1.1) の entropy solution とする．このとき，

$$\frac{\partial}{\partial t}(S(u)) + \mathrm{div}_x(\eta(u)) \le 0 \tag{2.4}$$

が $\mathbb{R}$ 上の任意の凸関数 S に対して成り立つ．ただし，η は $\eta' = S'A'$ を満たす関数である．

補足 5. $S(u) := |u-k|$, $k \in \mathbb{R}$ とおけば，不等式 (2.4) は不等式 (2.1) に他ならない．すなわち，命題 2.2 は関数 u が不等式 (2.4) を満たすことと関数 u が entropy solution であることとが同値であることを主張している．ただし，関数 $S(u) = |u-k|$ は C^1 級でないため，S' は distribution の意味で解釈しなければならない．

証明. $F(k) := |k|/2$, $k \in \mathbb{R}$ が 1 次元 Laplace 方程式の基本解であることに注意すると，$S''(u) = (S'' * F)''(u)$ が成り立つ．実際，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して，$(F * \varphi'')(x) = \varphi(x)$ が成り立つことに注意すれば，

$$\langle (S'' * F)'', \varphi \rangle = \langle S'' * F, \varphi'' \rangle = \langle S'', F * \varphi'' \rangle = \langle S'', \varphi \rangle$$

である．よって，

$$S(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{S''(k)}{2} |u-k| \, dk + au + b$$

が成り立つ．ただし，a と b は定数である．命題 2.1 より u は distributional solution でもあるから，$S(u) = au + b$ の場合には

$$\frac{\partial}{\partial t}(S(u)) + \mathrm{div}_x(\eta(u)) = a(u_t + \mathrm{div}_x(A(u))) = 0$$

が成り立つ．したがって，以下では線型部分を省略し，

$$S(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{S''(k)}{2} |u-k| \, dk$$

と仮定する．このとき，

$$\eta'(u) = S'(u)A'(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{S''(k)}{2} \, \mathrm{sgn}(u-k) \, dk A'(u)$$

であり，これを積分すれば，定数差を除いて

$$\eta(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{S''(k)}{2} \, \mathrm{sgn}(u-k)(A(u) - A(k)) \, dk$$

となる．よって，任意の $f \in C_0^\infty(\tilde{\pi_T})$ に対して

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi_T} S(u) f_t + \eta(u) \cdot \nabla_x f \, dtdx \\
=& \int_{\mathbb{R}} \int_{\pi_T} \frac{S''(k)}{2} |u-k| f_t \, dtdx \, dk + \int_{\mathbb{R}} \int_{\pi_T} \frac{S''(k)}{2} \, \mathrm{sgn}(u-k)(A(u) - A(k)) \cdot \nabla_x f \, dtdx \, dk \\
=& \int_{\mathbb{R}} \frac{S''(k)}{2} \int_{\pi_T} |u-k| f_t + \mathrm{sgn}(u-k)(A(u) - A(k)) \cdot \nabla_x f \, dtdx \, dk \\
\ge& 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，S が凸であることから $S'' \ge 0$ であることを用いた．以上により，u が entropy solution であるならば不等式 (2.4) が成り立つことが示された． □

3　Entropy solution の一意性

本節では, 初期値問題 (1.1) に対する entropy solution の一意性を証明する.

定理 3.1. 初期値を u^0, v^0 とする初期値問題 (1.1) の entropy solution をそれぞれ u, v とする. 実数 M を, 不等式 $\|u\|_{L^\infty(\pi_T)} \leq M$, $\|v\|_{L^\infty(\pi_T)} \leq M$ を満たすものとし, $N := \max_{|u| \leq M} |A'(u)|$ とする. このとき, 任意の $R > 0$ に対して

$$\int_{S_\tau} |u(\tau, x) - v(\tau, x)| \, dx \leq \int_{B_R} |u^0(x) - v^0(x)| \, dx$$

がほとんど全ての $0 < \tau < T_0 := \min\{T, R/N\}$ について成り立つ. ただし,

$$S_\tau := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq R - N\tau\}$$

である.

補足 6. 定理 3.1 に現れる集合 S_τ は円錐

$$C := \{(t, x) \in \pi_T \mid |x| \leq R - Nt, \, 0 \leq t \leq T_0\}$$

の $t = \tau$ での断面である.

補題 3.2. u, v を定理 3.1 のものとし, $g \in C_0^\infty(\tilde{\pi_T} \times \tilde{\pi_T})$, $g \geq 0$ とする. このとき,

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi_T \times \pi_T} |u(t, x) - v(\tau, y)|(g_t + g_\tau) \\
&+ \operatorname{sgn}(u(t, x) - v(\tau, y))(A(u(t, x)) - A(v(\tau, y))) \cdot (\nabla_x g + \nabla_y g) \, dt dx d\tau dy \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. 不等式 (2.2) で $k = v(\tau, y)$, $f(t, x) = g(t, x, \tau, y)$ とし, τ と y について積分し, これの u と v を入れ換えたものを考えて足し合わせれば, 求める不等式が得られる. □

補題 3.3. u, v を定理 3.1 のものとし, $f \in C_0^\infty(\tilde{\pi_T})$, $f \geq 0$ とする. このとき,

$$\int_{\pi_T} |u - v| f_t + \operatorname{sgn}(u - v)(A(u) - A(v)) \cdot \nabla_x f \, dt dx \geq 0$$

が成り立つ.

証明. $f \in C_0^\infty(\tilde{\pi_T})$ に対して

$$g_\epsilon(t, x, \tau, y) := f\left(\frac{t + \tau}{2}, \frac{x + y}{2}\right) \rho_\epsilon \left(\frac{t - \tau}{2}, \frac{x - y}{2}\right)$$

で関数 g を定義する. ただし, ρ_ϵ は $\mathbb{R}^{d+1}$ 上の軟化子で, $\operatorname{supp} \rho_\epsilon \subset B_\epsilon$ を満たすものとする. $\epsilon > 0$ を十分小さく取ることで, $g \in C_0^\infty(\tilde{\pi_T} \times \tilde{\pi_T})$ とできる. ここで,

$$\bar{t} := \frac{t + \tau}{2}, \, \bar{x} := \frac{x + y}{2}, \, \Delta t := \frac{t - \tau}{2}, \, \Delta x := \frac{x - y}{2}$$

と記すことにすると,

$$(g_{\epsilon,t}+g_{\epsilon,\tau})(t,x,\tau,y)=f_t(\bar{t},\overline{x})\rho_\epsilon(\Delta t,\Delta x),$$
$$(\nabla_x g_\epsilon+\nabla_y g_\epsilon)(t,x,\tau,y)=(\nabla_x f)(\bar{t},\overline{x})\rho_\epsilon(\Delta t,\Delta x)$$

が成り立つ. よって, 補題 3.2 より,

$$\begin{aligned}&\int_{\pi_T\times\pi_T}|u(t,x)-v(\tau,y)|f_t(\bar{t},\overline{x})\rho_\epsilon(\Delta t,\Delta x)\\&+\operatorname{sgn}(u(t,x)-v(\tau,y))(A(u(t,x))-A(v(\tau,y)))\cdot(\nabla_x f)(\bar{t},\overline{x})\rho_\epsilon(\Delta t,\Delta x)\,dtdxd\tau dy\\&\geq 0\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $\epsilon\downarrow 0$ の極限を取れば, 求める不等式が得られる. 極限の議論を厳密に行うのは手間であるため省略する. 詳細は Zou [2] を参照されたい. □

定理 3.1 の証明. 補題 3.3 より, distribution の意味で

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u-v|)+\operatorname{div}_x(\operatorname{sgn}(u-v)(A(u)-A(v)))\leq 0$$

が成り立つ. さらに, 定数 N の仮定から $|A(u)-A(v)|\leq N|u-v|$ が成り立つから, 任意の単位ベクトル ν に対して $-N|u-v|\leq\operatorname{sgn}(u-v)(A(u)-A(v))\cdot\nu$ が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\int_{S_t}|u-v|\,dx\right)&=\int_{S_t}\frac{\partial}{\partial t}(|u-v|)\,dx-N\int_{\partial S_t}|u-v|\,dS\\&\leq\int_{S_t}\frac{\partial}{\partial t}(|u-v|)\,dx+\int_{\partial S_t}\operatorname{sgn}(u-v)(A(u)-A(v))\cdot\hat{n}\,dS\\&\leq\int_{S_t}\frac{\partial}{\partial t}(|u-v|)\,dx+\operatorname{div}_x(\operatorname{sgn}(u-v)(A(u)-A(v)))\,dx\leq 0\end{aligned}$$

が成り立つ. これを積分すれば,

$$\int_{S_\tau}|u-v|\,dx\leq\int_{S_0}|u-v|\,dx=\int_{B_R}|u^0-v^0|\,dx$$

が得られる. この議論を精密に行うためには,

$$\mu(t):=\int_{S_t}|u(t,x)-v(t,x)|\,dx$$

が測度零集合を除いて単調非増大で, $\mu(t)\to\mu(0)$ が適当な意味で成り立つことを見ないといけないが, ここでは省略する. □

4 Entropy solution の存在

本節では, entropy solution の存在について概説する. $\epsilon>0$ に対して, 初期値問題

$$u_t+\operatorname{div}_x(A(u))=\epsilon\Delta u,\quad u|_{t=0}=u^0$$

を考える．これは elliptic regularization ではなく parabolic regularization であることに注意する．u^0 が有界連続ならば, この初期値問題の古典解が一意に存在することが知られている．この事実から entropy solution の存在を示すためには, 十分滑らかな初期値 u^0 に対して, 古典解の族 $\{u_\epsilon\}$ が $L^\infty(\pi_T)$ で収束する部分列を持つことを証明すれば十分である．この 1 つの極限は不等式 (2.2) を満たすので entropy solution になる．また, 一般の初期値 $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対しては, 滑らかな初期値の列 $\{u_h^0\}$ を考え, 対応する古典解の列 $\{u_{\epsilon,h}\}$ の $h \to 0$, $\epsilon \to 0$ の部分列を取り出せば良い．

参考文献

[1] P. D. Lax, *Hyperbolic partial differential equations*, Courant Lecture Notes **14**, AMS (2006).

[2] Y. Zou, Entropy and kinetic formulations of conservation laws (2015), 25pp.