熱方程式の H^1 弱解

川越 大輔

2021 年 4 月 18 日

1　イントロダクション

n 次元熱方程式の Cauchy 問題

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.1}$$

の H^1 弱解について論じる．以下, 本節では $(\cdot,\cdot)$ は L^2 内積, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $H^{-1}-H^1$ dual pair をそれぞれ表す.

定義 1. $T>0$, $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ とする．函数 $u \in C^0([0,T];H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1((0,T);H^1(\mathbb{R}^n))$ が Cauchy 問題 (1.1) の H^1 弱解であるとは, $u(0)=f$ であって, 任意の $t \in (0,T)$ と任意の $w \in H^1(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$(u_t(t), w) = \langle \Delta u(t), w\rangle = -(\nabla u(t), \nabla w)$$

が成立することを言う.

補足 1. Cauchy 問題 (1.1) の古典解の gradient ∇u が $L^2(\mathbb{R}^n)$ に属するならば, u は H^1 弱解である．このことは部分積分により確かめることができる．また, $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ のとき, 古典解 u の gradient ∇u は実際に $L^2(\mathbb{R}^n)$ に属する．より正確には, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ でも $t>0$ において $\nabla u(t)$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ に属する．このことは後程検証する.

補足 2. Cauchy 問題 (1.1) の H^1 弱解の定義において, 解の存在時刻 $T>0$ を先に指定しておいたが, この Cauchy 問題に限って言えば, $T=\infty$ としてよい.

補足 3. 以下の議論の都合上, Cauchy 問題 (1.1) の H^1 弱解を $C^0([0,T];H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1((0,T);H^1(\mathbb{R}^n))$ に属するものとして定義したが, H^1 弱解の満たす方程式を見れば, $C^0([0,T];H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1((0,T);L^2(\mathbb{R}^n))$ に属するものとして考えるほうが自然である.

2　H^1 弱解の一意性

Cauchy 問題 (1.1) の H^1 弱解の一意性を議論するため, H^1 弱解に対するアプリオリ評価を導出する.

補題 2.1. u を Cauchy 問題 (1.1) の H^1 弱解とする. このとき, 任意の $t \in (0,T)$ に対して

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} = -2\left(\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u_t(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)$$

が成立する.

証明. u が H^1 弱解であるという仮定から, 時間微分と積分との順序交換や部分積分が正当化され,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} =& \frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\ =& 2(u_t(t), u(t)) + 2(\nabla u(t), \nabla u_t(t))\\ =& 2\langle \Delta u(t), u(t)\rangle - 2\langle \Delta u(t), u_t\rangle\\ =& -2(\nabla u(t), \nabla u(t)) - 2(u_t(t), u_t(t))\\ =& -2\left(\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u_t(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)\end{aligned}$$

が得られる. □

補題 2.1 を利用して, H^1 弱解の一意性を証明する.

定理 2.2. Cauchy 問題 (1.1) の H^1 弱解は, 存在すればただ 1 つである.

証明. 補題 2.1 より, Cauchy 問題 (1.1) の H^1 弱解について

$$\|u(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} \le \|u(0)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \|f\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}$$

が任意の $t \in [0,T]$ に対して成り立つ. ここで, u_1, u_2 を Cauchy 問題の 2 つの H^1 弱解とすると, その差 $\tilde{u} := u_1 - u_2$ は初期値を $f = 0$ とする Cauchy 問題 (1.1) の H^1 弱解である. ところが, 先の評価から任意の $t \in [0,T]$ に対して $\|\tilde{u}(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \le 0$ である. したがって, $\tilde{u} = 0$ すなわち $u_1 = u_2$ が証明された. □

3　H^1 弱解の存在

続いて, Cauchy 問題 (1.1) の H^1 弱解の存在を議論する.

定理 3.1. $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, Cauchy 問題 (1.1) の古典解は H^1 弱解である.

定理 3.1 の証明のため, いくつか評価を準備しておく.

補題 3.2. $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, Cauchy 問題 (1.1) の古典解について

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

が任意の $t \in [0,T]$ に対して成立する.

証明. Cauchy 問題 (1.1) の古典解は

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} H_n(t,x-y)f(y)\,dy$$

と書けたことを思い出す. ただし,

$$H_n(t,x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

である. この表示を利用すると, Cauchy-Schwarz の定理より

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_n(t,x-y)f(y)\,dy \right)^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_n(t,x-y)\,dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_n(t,x-y)|f(y)|^2\,dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_n(t,x-y)\,dx \right) |f(y)|^2\,dy \\
&= \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2
\end{aligned}$$

が得られる. これの平方根を取って結論を得る. □

系 3.3. $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, Cauchy 問題 (1.1) の古典解について

$$\|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$$

が任意の $t \in [0,T]$ に対して成立する.

証明. 補題 3.2 より, 古典解 u の L^2 ノルムは既に評価されているから, ∇u の L^2 ノルムを評価すればよい. ところが, 部分積分により

$$\begin{aligned}
\|\partial_{x_j} u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j} H_n(t,x-y)f(y)\,dy \right)^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} -\partial_{y_j} H_n(t,x-y)f(y)\,dy \right)^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_n(t,x-y)\partial_{y_j} f(y)\,dy \right)^2 dx
\end{aligned}$$

と変形できる. これを補題 3.2 のように評価すれば $\|\partial_{x_j} u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \|\partial_{x_j} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$ が得られ, これを j について足し合わせて平方根をとれば, $\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ が得られる. □

この手順を繰り返せば, 次の評価も得られる.

系 3.4. $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, Cauchy 問題 (1.1) の古典解について

$$\|u(t)\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}$$

が任意の $t \in [0,T]$ に対して成立する.

蛇足ではあるが, 初期値 f が $L^2(\mathbb{R}^n)$ にしか属さない場合でも, 古典解は $t>0$ で $H^1(\mathbb{R}^n)$ に属することを見る.

命題 3.5. $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, Cauchy 問題 (1.1) の古典解について

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \sqrt{\frac{n}{\pi t}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

が任意の $t \in (0,T]$ に対して成り立つ.

証明. 補題 3.2 と同様にして,

$$\begin{aligned}
\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq& \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_j} H_n(t,x-y)|\,dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_j} H_n(t,x-y)||f(y)|^2\,dy \right) dx \\
=& \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\partial_{x_j} H_n)(t,z)|\,dz \right)^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2
\end{aligned}$$

と評価できる. そこで, 積分

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(\partial_{x_j} H_n)(t,z)|\,dz$$

の評価を行う.

$$(\partial_{x_j} H_n)(t,z) = -\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \frac{z_j}{2t} e^{-\frac{|z|^2}{4t}}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |(\partial_{x_j} H_n)(t,z)|\,dz =& \frac{1}{2t(4\pi t)^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |z_j| e^{-\frac{z_j^2}{4t}}\,dz_j \right) \prod_{k\neq j} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z_k^2}{4t}}\,dz_k \right) \\
=& \frac{1}{t(4\pi t)^{1/2}} \int_0^\infty r e^{-\frac{r^2}{4t}}\,dr \\
=& \frac{1}{\sqrt{\pi t}}
\end{aligned}$$

である. よって,

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \frac{n}{\pi t}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

である. 平方根を取って結論を得る. □

この評価を応用すれば, 次のことが分かる.

系 3.6. $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, Cauchy 問題 (1.1) の古典解について,

$$\|u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\Delta u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

が任意の $t \in (0,T]$ に対して成り立つ.

証明. 命題 3.5 の証明と同様にして,

$$\begin{aligned}\|\Delta u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 =& \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j}^2 H_n(t, x-y) f(y)\, dy \right)^2 dx \\ =& \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j} H_n(t, x-y) \partial_{y_j} f(y)\, dy \right)^2 dx \\ \leq& \sum_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\partial_{x_j} H_n)(t,z)|\, dz \right)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_{y_j} f(y)|^2\, dy \right) \\ =& \frac{1}{\pi t} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\end{aligned}$$

が得られる. 平方根を取って結論を得る. □

最後に, Cauchy 問題 (1.1) の偏導函数 ∇u_t の L^2 評価を与える.

補題 3.7. $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, Cauchy 問題 (1.1) の古典解について,

$$\|\nabla u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{n}{t} \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

が任意の $t \in (0, T]$ に対して成り立つ.

証明. 補題 3.2 および系 3.3 の証明と同様にして,

$$\begin{aligned}\|\partial_{x_j} u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 =& \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t H_n(t, x-y) \partial_{y_j} f(y)\, dy \right) dx \\ \leq& \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t H_n(t,z)|\, dz \right)^2 \|\partial_{x_j} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\end{aligned}$$

が得られる. これを j について和を取り, その平方根を取れば,

$$\|\nabla u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t H_n(t,z)|\, dz \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

を得る.

ここで, 積分

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t H_n(t,z)|\, dz$$

を評価する.

$$\partial_t H_n(t,x) = -\frac{n}{2t} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \frac{|x|^2}{4t^2} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

であるから,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t H_n(t,z)|\, dz \leq \frac{n}{2t} \int_{\mathbb{R}^n} H_n(t,z)\, dz + \frac{1}{4t^2} \int_{\mathbb{R}^n} |z|^2 H_n(t,z)\, dz$$

である. 右辺第 1 項の積分は 1 であり, 右辺第 2 項の積分は

$$\int_{\mathbb{R}^n} |z|^2 H_n(t,z)\, dz = \sum_{j=1}^n \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} z_j^2 e^{-\frac{z_j^2}{4t}}\, dz_j \prod_{k \neq j} \int_{\mathbb{R}} H(t, z_k)\, dz_k$$

$$
\begin{aligned}
&= n\frac{1}{(4\pi t)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} x(-2t)\partial_x e^{-\frac{x}{4t}}\,dx \\
&= 2nt
\end{aligned}
$$

であるから, これらをまとめて

$$
\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t H_n(t,z)|\,dz \le \frac{n}{2t} + \frac{2nt}{4t^2} = \frac{n}{t}
$$

を得る.

以上より,

$$
\|\nabla u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \frac{n}{t}\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}
$$

である. □

系 3.3, 系 3.6 および補題 3.7 より, $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ のとき Cauchy 問題 (1.1) の古典解は $C^0([0,T]; H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1((0,T); H^1(\mathbb{R}^n))$ に属する. すなわち, Cauchy 問題 (1.1) の古典解は H^1 弱解である. 以上より, 定理 3.1 が証明された.

4　今後の課題

4.1　gradient flow としての H^1 弱解

Cauchy 問題 (1.1) の H^1 弱解に対する考察は, Craig [2] の gradient flow の記述に対する著者の疑問に端を発する. Craig [2] では, 熱方程式の解を無限次元の gradient flow と見なせることを形式的計算により説明していたが, その形式的計算の正当化は自明ではなかった. そこで, 1. 適当なクラスの熱方程式の解は gradient flow となるか, 2. 熱方程式に対応する gradient flow の解の存在と一意性を議論することで, 元の熱方程式の解の存在と一意性を示唆できるか, の 2 点を考察することとした.

本稿における考察は, 1 つ目の疑問に肯定的な解答を与えるものである. Cauchy 問題 (1.1) の H^1 弱解の定義は, H^1 弱解が energy functional

$$
E(u) := \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2\,dx
$$

の gradient flow の方程式を H^{-1} の意味で満たすことを意味している. すなわち, Cauchy 問題 (1.1) の H^1 弱解は energy functional の gradient flow である.

一方で, 2 つ目の疑問は未解決である. Ambrosio, Gigli, Savaré [1] では Cauchy の折れ線の方法で gradient flow の解の存在を議論しており, この例として Cauchy 問題 (1.1) の H^2 解の存在に言及している. この例では $L^2(\mathbb{R}^n)$ の双対空間が $L^2(\mathbb{R}^n)$ であることを利用しているため, H^1 弱解の議論には直ちには応用できない. 今回のような H^{-1}-H^1 dual pair や Riesz の表現定理による H^1 での議論で修正することを検討したが, 解決には至らなかった. 読者にはこの疑問の解決に挑戦してもらいたい. この疑問の解決法が見つかれば, その方法をより一般の放物型偏微分方程式の Cauchy 問題の適切性を議論するのに応用できるかもしれない.

4.2 高階導関数の評価

今回の解析では, 系 3.4 のように初期値に十分な滑らかさを課した場合と, 命題 3.5 のように初期値に滑らかさを仮定しない場合で, Cauchy 問題 (1.1) の古典解の偏導関数の評価を与えた. 実際には初期値 f が $L^2(\mathbb{R}^n)$ に属する時, Cauchy 問題 (1.1) の古典解 u は $t > 0$ で C^∞ 級であり, 高階の偏導関数が存在する. 果たして, これらの偏導関数も $L^2(\mathbb{R}^n)$ に属し続けるであろうか?

これまでの評価と同様にして, multi-index α に対して

$$\|\partial_x^\alpha u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\partial_x^\alpha H_n)(t,z)|\, dz \right) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

が成立する. これを計算すれば,

$$\|\partial_x^\alpha u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C_\alpha}{t^{|\alpha|/2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

のような評価が得られると予想される. まずはこの予想が正しいかどうかを読者に吟味してもらいたい.

さらに, この評価が何かしらの意味を含んでいるのかどうかも検討する余地がある. f が単に $L^2(\mathbb{R}^n)$ に属するだけであって, 何の滑らかさも仮定しない場合には, $t \downarrow 0$ の極限で $\|\partial_x^\alpha u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ が発散すると考えることは合理的である. もしこれが収束するならば, $t \downarrow 0$ で $\partial_x^\alpha u(t) \to \partial_x^\alpha f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ となるはずだからである. 一方で, $t \uparrow \infty$ の極限では何を意味するのであろうか? もし偏導関数の評価が最良であるならば, 高階の偏導関数の L^2 ノルムが低階のものよりも速く減衰することになる. これは解の正則性が失われることを意味するのであろうか?

参考文献

[1] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*, Lectures in Mathematics. ETH Zürich, Second Edition, Birkhäuser, Basel (2008).

[2] W. Craig, *A Course on Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics 197, American Mathematical Society, USA (2018).

[3] M. Erbar, The heat equation on manifolds as a gradient flow in the Wasserstein space, *Ann. Inst. H. Poincaré (B) Probab. et Statist.*, **46**(1) (2010), pp. 1–23.