熱方程式の解の初期条件への収束について

川越 大輔

2021 年 4 月 29 日

1 イントロダクション

本稿では, 1 次元熱方程式の Cauchy 問題

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.1}$$

の解の初期条件への収束について考察する.

$f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$ のとき, 熱方程式を満たす関数 u は

$$u(t,x) = H(t,\cdot) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t,x-y)f(y)\,dy \tag{1.2}$$

で与えられる. ただし,

$$H(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

である. この関数 H は熱核 (heat kernel) と呼ばれる.

以下の議論では, 熱核 H に関する次の事実を用いる.

命題 1.1. 熱核 H は次の性質を持つ.

1. 任意の $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ に対して $H(t,x) > 0$ である.

2. 任意の $t \in (0,\infty)$ に対して
$$\int_{-\infty}^{\infty} H(t,x)\,dx = 1$$
が成り立つ.

3. 任意の $\delta > 0$ に対して,
$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{|x| \geq \delta} H(t,x)\,dx = 0$$
が成り立つ.

2　初期条件への収束

熱核 H は $t=0$ で定義されないから, (1.2) は $t=0$ で意味を持たない. そこで, u の定義域を

$$u(t,x) := \begin{cases} H(t,\cdot) * f(x), & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ f(x), & t=0, x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.1}$$

と $[0,\infty) \times \mathbb{R}$ 上に拡張する.

まずは初期値 f が $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数であるときに (2.1) で定義される関数 u が $t=0$ で連続であることを確認する.

定理 2.1. f を $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数とする. このとき, (1.2) で定義される関数 $u(t,\cdot)$ は $t \downarrow 0$ で f に広義一様収束する.

証明. 関数 u の定義と命題 1.1 の 1. より, $t>0$, $x \in \mathbb{R}$ で

$$\begin{aligned} |u(t,x) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(t,x-y) f(y)\, dy - \int_{-\infty}^{\infty} H(t,y)\, dy f(x) \right| \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} H(t,y) |f(x-y) - f(x)|\, dy \end{aligned}$$

が成り立つ.

ここで, $R>0$, $\epsilon>0$ をそれぞれ任意に取る. このとき, 関数 f は各有界閉区間上一様連続であるから, ある $\delta>0$ が存在して, $|y|<\delta$ ならば

$$\max_{|x| \le R} |f(x-y) - f(x)| < \epsilon$$

が成り立つ. このような $\delta>0$ を一つ取り, 先の評価を 2 つに分割する:

$$|u(t,x) - f(x)| \le \int_{|y|<\delta} H(t,y) |f(x-y) - f(x)|\, dy + \int_{|y| \ge \delta} H(t,y) |f(x-y) - f(x)|\, dy.$$

この右辺の第 1 項は, δ の取り方から, $|x| \le R$ のとき

$$\int_{|y|<\delta} H(t,y) |f(x-y) - f(x)|\, dy \le \epsilon \int_{|y|<\delta} H(t,y)\, dy \le \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} H(t,y)\, dy = \epsilon$$

と評価される. ここで, 命題 1.1 の 2. を用いた.

右辺の第 2 項は

$$\int_{|y| \ge \delta} H(t,y) |f(x-y) - f(x)|\, dy \le 2 \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(y)| \right) \int_{|y| \ge \delta} H(t,y)\, dy$$

となるが, ある $t_0>0$ が存在して, $0<t<t_0$ ならば

$$2 \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(y)| \right) \int_{|y| \ge \delta} H(t,y)\, dy < \epsilon$$

が成り立つ. ここで, 命題 1.1 の 3. を用いた.

以上より, 任意の $R>0$ と $\epsilon>0$ に対してある $t_0>0$ が存在して, $0<t<t_0$ ならば

$$\max_{|x| \le R} |u(t,x) - f(x)| \le 2\epsilon$$

が成り立つ. すなわち, 関数 $u(t,x)$ は $t \downarrow 0$ で関数 f に広義一様収束する. □

以上より, f が有界連続関数であるとき, 式 (2.1) で定義される関数 u は Cauchy 問題 (1.1) の古典解となっていることが分かった.

初期条件 f が更に良い性質を持てば, 定理 2.1 の収束は改良される.

定理 2.2. 関数 f が $\mathbb{R}$ 上有界で, 一様連続であるとする. このとき, (1.2) で定義される関数 $u(t,\cdot)$ は $t \downarrow 0$ で関数 f に一様収束する.

証明. 関数 f が $\mathbb{R}$ 上一様連続であるから, 任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して, $|y| < \delta$ ならば

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| \leq \epsilon$$

が成り立つ. このような $\delta > 0$ を 1 つ取り,

$$|u(t,x) - f(x)| \leq \int_{|y|<\delta} H(t,y)|f(x-y) - f(x)|\,dy + \int_{|y|\geq\delta} H(t,y)|f(x-y) - f(x)|\,dy$$

と分割すれば, 定理 2.1 の証明と同様の議論を行うことで, ある $t_0 > 0$ が存在して, $0 < t < t_0$ ならば

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x) - f(x)| \leq 2\epsilon$$

が成り立つことが分かる. □

系 2.3. f を $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数で, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ を満たすとする. このとき, (1.2) で定義される関数 $u(t,\cdot)$ は $t \downarrow 0$ で関数 f に一様収束する.

証明. $\epsilon > 0$ を任意に 1 つ取る. このとき, 仮定よりある $R \geq 0$ が存在して, $|x| \geq R$ ならば $|f(x)| \leq \epsilon$ となる. このような R を 1 つ取る. 関数 f は各有界閉区間上一様連続となるから, 先の R に対してある $\delta > 0$ が存在して,

$$\sup_{|y|<\delta} \max_{|x|\leq R} |f(x-y) - f(x)| \leq \epsilon$$

が成り立つ.

今, $x > R$, $0 < y < \delta$ のとき,

$$|f(x-y) - f(x)| \leq |f(x-y) - f(R)| + |f(R) - f(x)| \leq 3\epsilon$$

であり, $x > R$, $-\delta < y < 0$ のときは $x - y > R$ より

$$|f(x-y) - f(x)| \leq 2\epsilon$$

であるから,

$$\sup_{|y|<\delta} \sup_{x>R} |f(x-y) - f(x)| \leq 3\epsilon$$

である. $x < -R$ の場合についても同様の評価が成り立つから, まとめて

$$\sup_{|y|<\delta} \sup_{|x|>R} |f(x-y) - f(x)| \leq 3\epsilon$$

が得られる.

結局

$$\sup_{|y|<\delta} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| \leq 3\epsilon$$

であるから, 関数 f は $\mathbb{R}$ 上一様連続である. したがって, 定理 2.2 から結論が従う. □

系 2.4. f を $\mathbb{R}$ 上の C^2 級関数とし, f, f', f'' がそれぞれ $\mathbb{R}$ 上有界であるとする. このとき, (1.2) で定義される関数 $u(t,\cdot)$ について, その偏導関数 $\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)$ は $t\downarrow 0$ で関数 f'' に広義一様収束する.

証明. (1.2) で定義される関数 u は各点 $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$ で

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t,x-y)f(y)\,dy$$

を満たすが, ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t,x-y)f(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}H(t,x-y)\right)f(y)\,dy$$

と見なして部分積分を 2 回行えば,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t,x-y)f(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}H(t,x-y)f''(y)\,dy$$

を得る. よって,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}H(t,x-y)f''(y)\,dy$$

であり, これに定理 2.1 を適用すれば, 結論が得られる. □

系 2.4 の証明を繰り返し行うことで, 次の命題が得られる.

系 2.5. m を自然数とする. f を $\mathbb{R}$ 上の C^{2m} 級関数とし, $0\le j\le 2m$ を満たす任意の整数 j に対して f の j 階導関数 $f^{(j)}$ が $\mathbb{R}$ 上有界であるとする. このとき, (1.2) で定義される関数 $u(t,\cdot)$ について, その k 階偏導関数 $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(t,\cdot)$ $(0\le k\le m)$ は $t\downarrow 0$ で関数 $f^{(2k)}$ に広義一様収束する. さらに, $k\ne m$ ならば, この収束は一様収束となる.

証明. f の j 階導関数 $f^{(j)}$ が $\mathbb{R}$ 上有界ならば $f^{(j-1)}$ は $\mathbb{R}$ 上 Lipschitz 連続, したがって一様連続になることに注意すると, 定理 2.2 より $0\le k\le m-1$ ならば $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(t,\cdot)$ が $t\downarrow 0$ で $f^{(2k)}$ に一様収束することが分かる. □

初期値 f に連続性が仮定されない場合, (2.1) が初期条件を満たすことは次のように解釈される.

定理 2.6. $f\in L^p(\mathbb{R})$, $1\le p<\infty$ とする. このとき, (1.2) で定義される関数 $u(t,\cdot)$ に対して

$$\lim_{t\downarrow 0}\|u(t,\cdot)-f\|_{L^p(\mathbb{R})}=0$$

が成り立つ.

証明. $f\in L^p(\mathbb{R})$, $1\le p<\infty$ のとき, (1.2) で定義される関数 u について, $u(t,\cdot)\in L^p(\mathbb{R})$ が成り立つことを確認する. $p=1$ のとき,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}H(t,x-y)f(y)\,dy\right|dx\le\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}H(t,x-y)\,dx\right)|f(y)|\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|\,dy$$

である．また, $1<p<\infty$ のとき, Hölder の不等式より

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}H(t,x-y)f(y)\,dy\right|^p\,dx\\
&\leq\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}H(t,x-y)\,dy\right)^{p/q}\left(\int_{-\infty}^{\infty}H(t,x-y)|f(y)|^p\,dy\right)\,dx\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|^p\,dy
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし, q は $1/p+1/q=1$ を満たす実数である．よって, $1\leq p<\infty$ で $\|u(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})}\leq\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$ が任意の $t>0$ で成立する．

$C_0(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の連続関数で台がコンパクトなものからなる関数空間とすると, $C_0(\mathbb{R})$ は $L^p(\mathbb{R})$ で稠密である．よって, 任意の $\epsilon>0$ に対して $\|f-f_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R})}<\epsilon$ を満たす $f_\epsilon\in C_0(\mathbb{R})$ が存在する．ここで,

$$u_\epsilon(t,x):=H(t,\cdot)*f_\epsilon(x)$$

とおくと, Minkowski の不等式より

$$\|u(t,\cdot)-f\|_{L^p(\mathbb{R})}\leq\|u(t,\cdot)-u_\epsilon(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})}+\|u_\epsilon(t,\cdot)-f_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R})}+\|f_\epsilon-f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

が成り立つ．

右辺第 1 項については, $u(t,\cdot)$ が $L^p(\mathbb{R})$ が属することの議論において f を $f-f_\epsilon$ で置き換えることで, $\|u(t,\cdot)-u_\epsilon(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})}\leq\|f-f_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R})}$ が成立することが分かる．

一方, $f_\epsilon\in C_0(\mathbb{R})$ であるから, ある $R>0$ が存在して, $|x|>R$ ならば $f_\epsilon(x)=0$ が成り立つ．このことを踏まえて, 右辺第 2 項を

$$\|u_\epsilon(t,\cdot)-f_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\leq\int_{|x|\leq 2R}|u_\epsilon(t,x)-f_\epsilon(x)|^p\,dx+\int_{|x|>2R}\left|\int_{-\infty}^{\infty}H(t,x-y)f_\epsilon(y)\,dy\right|^p\,dx$$

と分解して評価する．この右辺の第 1 項は

$$\int_{|x|\leq 2R}|u_\epsilon(t,x)-f_\epsilon(x)|^p\,dx\leq 4R\|u_\epsilon(t,\cdot)-f_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^p$$

と評価されるが, これは系 2.3 より $t\downarrow 0$ で 0 に収束する．また, 右辺の第 2 項は

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|>2R}\left|\int_{-\infty}^{\infty}H(t,x-y)f_\epsilon(y)\,dy\right|^p\,dx&=\int_{|x|>2R}\left|\int_{|y|<R}H(t,x-y)f_\epsilon(y)\,dy\right|^p\,dx\\
&\leq\int_{|x|>2R}\left(\int_{|y|<R}H(t,x-y)|f_\epsilon(y)|^p\,dy\right)\,dx\\
&\leq\|f_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^p\int_{|y|<R}\left(\int_{|z+y|>2R}H(t,z)\,dz\right)\,dy\\
&\leq 2R\|f_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^p\int_{|z|>R}H(t,z)\,dz
\end{aligned}
$$

と評価されるが, これは命題 1.1 の 3. より $t\downarrow 0$ で 0 に収束する．

これらの評価をまとめて,

$$\lim_{t\downarrow 0}\|u(t,\cdot)-f\|_{L^p(\mathbb{R})}\leq 2\|f-f_\epsilon\|_{L^p(\mathbb{R})}<2\epsilon$$

が得られる. $\epsilon>0$ は任意であったから,

$$\lim_{t\downarrow 0}\|u(t,\cdot)-f\|_{L^p(\mathbb{R})}=0$$

が証明された. □

3 課題

系 2.4 では, (1.2) で定義される関数 $u(t,\cdot)$ について, その偏導関数 $\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)$ が $t\downarrow 0$ である関数に広義一様収束するための十分条件を述べた. 逆に, 系 2.4 の仮定は $\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)$ が $t\downarrow 0$ である関数に広義一様収束するための必要条件となっているか? 各点収束や一様収束の場合はどうか?

参考文献

[1] W. Craig, *A Course on Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics 197, American Mathematical Society, USA (2018).