1次元の熱核について

川越 大輔

2021 年 4 月 28 日

本稿では, 1 次元熱方程式の Cauchy 問題

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{0.1}$$

の解の基本解である熱核 (heat kernel) を発見的考察により導出し, その性質を調査する.

Cauchy 問題 (0.1) の解の表示について考察する. Cauchy 問題 (0.1) を形式的に (x 変数について) Fourier 変換すると

$$\begin{cases} \hat{u}_t(t,\xi) = -\xi^2 u(t,\xi), (t,\xi) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{0.2}$$

となる. ただし,

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, dx$$

である. 得られた Cauchy 問題 (0.2) を解くと,

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-\xi^2 t}$$

が得られる.

ここで, Fourier 変換の公式を思い出しておこう.

補題 0.1. $f, g \in \mathcal{S}_x$ に対して

$$\mathcal{F}[f * g](\xi) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f](\xi) \mathcal{F}[g](\xi)$$

が成り立つ. ただし,

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y)\, dy$$

である.

証明. $f, g \in \mathcal{S}_x$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](\xi) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f * g(x) e^{-ix\xi}\, dx \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y)\, dy e^{-ix\xi}\, dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-i(x-y)\xi}\,dx\right)g(y)e^{-iy\xi}\,dy\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-iz\xi}\,dz\right)g(y)e^{-iy\xi}\,dy\\
&=\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-iz\xi}\,dz\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iy\xi}\,dy\right)\\
&=\sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f](\xi)\mathcal{F}[g](\xi)
\end{aligned}
$$

である. 以上より, 主張の等式が示された. □

定義 1. $\mathbb{R}$ 上の 2 つの関数 f, g に対して, 関数

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$$

を f と g の畳み込み積 (convolution) という.

補題 0.2. $\hat{f} \in \mathcal{S}_\xi$ に対して, f の逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]$ を

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi$$

で定義する. このとき, $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{S}_\xi$ に対して,

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}\hat{g}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] * \mathcal{F}^{-1}[\hat{g}](x)$$

が成り立つ.

補題 0.2 は補題 0.1 の等式の両辺を逆 Fourier 変換し, 反転公式

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = f(x)$$

に注意すれば得られる.

これを利用して, Cauchy 問題 (0.2) の解を形式的に逆 Fourier 変換すれば,

$$u(t,x) = H(t,\cdot) * f(x) \tag{0.3}$$

が得られる. ただし,

$$H(t,x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t}e^{i\xi x}\,d\xi$$

である. この積分は $t = 0$ では定義されないが, $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$ では定義されることに注意する. ($t > 0$ のときは $e^{-\xi^2 t}$ が可積分な優関数となる.)

$(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$ において, 関数 H の積分を実行する. Cauchy の積分定理より,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t}e^{i\xi x}\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(\xi-\frac{ix}{2t})^2}e^{-\frac{x^2}{4t}}\,d\xi = e^{-\frac{x^2}{4t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\xi^2}\,d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

である. したがって,

$$H(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} \tag{0.4}$$

である.

定義 2. (0.4) で定義される関数 H のことを熱核 (heat kernel) と呼ぶ.

命題 0.3. 熱核 H は次の性質を持つ.

1. $H \in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})$ である.

2. 任意の $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$ に対して $H(t,x)>0$ である.

3. 任意の $t\in(0,\infty)$ に対して
$$\int_{-\infty}^{\infty} H(t,x)\,dx = 1$$
が成り立つ.

4. 任意の $\delta>0$ に対して,
$$\lim_{t\downarrow 0}\int_{|x|\geq\delta} H(t,x)\,dx = 0$$
が成り立つ.

5. 任意の $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$ に対して,
$$\frac{\partial H}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t,x)$$
が成り立つ.

証明. 1. から 3. は自明である.

4. は, 積分変数を x から $z := x/2\sqrt{t}$ と変数変換すれば,
$$\int_{|x|\geq\delta} H(t,x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{|z|>\delta/(2\sqrt{t})} e^{-z^2}\,dz$$
となるが, e^{-z^2} は $\mathbb{R}$ 上可積分であったから, この式の右辺は $t\downarrow 0$ で 0 に収束する.

5. について, 実際に関数 H を微分すると,
$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial t}(t,x) &= \left(-\frac{1}{4\sqrt{\pi t^3}} + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi t^5}}\right)e^{-\frac{x^2}{4t}},\\
\frac{\partial H}{\partial x}(t,x) &= -\frac{x}{4\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{x^2}{4t}},\\
\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t,x) &= \left(-\frac{1}{4\sqrt{\pi t^3}} + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi t^5}}\right)e^{-\frac{x^2}{4t}}
\end{aligned}$$
となり, 確かに 5. が成り立つ. □

(0.3) で定義される関数 u が熱方程式を満たすことを見るために次の補題を用意する.

補題 0.4. $(t_0,x_0)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$ を 1 つ固定する. このとき, 関数 h を
$$h(y) := \left(\frac{1}{4\sqrt{\pi t_0^3}} + \frac{(x_0-y)^2}{8\sqrt{\pi t_0^5}}\right)e^{-\frac{(x_0-y)^2}{4t_0}}$$
と定義すると, $h\in L^1(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$ が成り立つ.

証明.

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} z^2 e^{-\frac{z^2}{4t_0}} = 4t_0 \sup_{x\in\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} = \frac{4t_0}{e}$$

より

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |h(y)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial H}{\partial t}(t_0, x_0 - y)\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{\pi t_0^3}} + \frac{1}{2e\sqrt{\pi t_0^3}} = \frac{e+2}{4e\sqrt{\pi t_0^3}}$$

である. よって, $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ である. また,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t_0^2}}\,dx =& 2\sqrt{\pi t_0}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{4t_0^2}}\,dx =& 4\sqrt{\pi t_0^3}\end{aligned}$$

であるから,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(y)|\,dy \leq \frac{1}{4\sqrt{\pi t_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_0-y)^2}{4t_0}}\,dy + \frac{1}{8\sqrt{\pi t_0^5}} \int_{-\infty}^{\infty} (x_0-y)^2 e^{-\frac{(x_0-y)^2}{4t_0}}\,dy = \frac{1}{t_0}$$

である. よって, $h \in L^1(\mathbb{R})$. 以上より, 結論が示された. $\square$

定理 0.5. $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ のとき, (0.3) で定義される関数 u は $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ の各点で熱方程式を満たす.

証明. 命題 0.3 の性質 5. より, 任意の $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$ に対して

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial H}{\partial t}(t, x-y) f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t, x-y) f(y)\,dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

が成り立つ. ここで, 微分と積分の順序交換を実行したが, $(t_0, x_0) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$ を固定したときに

$$F(y) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)||h(y)|$$

が可積分な優関数として取れるので, 順序交換は正当化される. (厳密には $(t_0, x_0) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$ を 1 つ固定したときに (t_0, x_0) の近傍をとり, その近傍上で一様な優関数を取らなければならないが, $t_0 > 0$ である限り $t > 0$ の範囲で近傍が取れるので問題ない.) したがって, $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ の各点で u が熱方程式を満たすことが確認された. $\square$

定理 0.6. $f \in L^1(\mathbb{R})$ のとき, (0.3) で定義される関数 u は $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ の各点で熱方程式を満たす.

証明. 可積分な優関数として

$$F(y) := |f(y)| \sup_{y\in\mathbb{R}} |h(y)|$$

を取れば, 定理 0.5 の証明と同様にして定理 0.6 が示される. $\square$

系 0.7. $1 \leq p \leq \infty$ とする. $f \in L^p(\mathbb{R})$ のとき, (0.3) で定義される関数 u は $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ の各点で熱方程式を満たす.

証明. $1 \leq q \leq \infty$ を $1/p + 1/q = 1$ を満たすように取る. このとき,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(y)|^q \, dy \leq \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{q-1} \|h\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

であるから, $h \in L^q(\mathbb{R})$ である. よって, Hölder の不等式より $hf \in L^1(\mathbb{R})$ である. また, 関数 h の定義より

$$\left| \frac{\partial H}{\partial t}(t_0, x_0 - y) \right| |f(y)| \leq |h(y)||f(y)|$$

である. したがって, 定理 0.5 の証明と同様にして系 0.7 が示される. □

参考文献

[1] W. Craig, *A Course on Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics 197, American Mathematical Society, USA (2018).