熱方程式の解の重み付き最大値評価

川越 大輔

2021 年 4 月 30 日

1　イントロダクション

本稿では, 1 次元熱方程式の Cauchy 問題

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.1}$$

の解の重み付き最大値評価について考察する.

初期値 f が $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数であるとき, 熱方程式を満たす関数 u は

$$u(t,x) = H(t,\cdot) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t,x-y) f(y)\, dy \tag{1.2}$$

で与えられる. ただし,

$$H(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

である. この関数 H は熱核 (heat kernel) と呼ばれる. 以下の議論は解の表示式 (1.2) に基づく.

2　解の重み付き最大値評価

(1.2) で定義された関数 u の x 変数に関する重み付き最大値評価について考察する.

定理 2.1. f を $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数とし, $M := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ とおく. このとき, (1.2) で定義される関数 $u(t,\cdot)$ について, 任意の $t > 0$ と任意の $j \geq 0$ に対してある $C_{j,t} > 0$ が存在して,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^j u}{\partial x^j}(t,x) \right| \leq C_{j,t} M$$

が成り立つ.

証明. $j = 0$ のとき,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(t,x)\, dx = 1$$

より, 任意の $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ に対して

$$|u(t,x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} H(t,x-y)|f(y)|\, dy \leq M \int_{-\infty}^{\infty} H(t,x-y)\, dy = M$$

が成り立つ.

$j \in \mathbb{N}$ のとき, 関数 H を x について j 回微分して

$$\frac{\partial^j H}{\partial x^j}(t,x) = p_{j,t}(x)H(t,x)$$

を得る. ただし, $p_{j,t}(x)$ は x についての j 次多項式で, その係数は一般に t に依存するものである. 関数 H の性質から, ある定数 $C_{j,t} > 0$ が存在して, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|p_{j,t}(x)H(t,x)| \le c_{j,t}\langle x \rangle^{-2}$$

が成り立つ. ただし,

$$\langle x \rangle := \sqrt{1+|x|^2}$$

である.

明らかに $\langle \cdot \rangle \in L^1(\mathbb{R})$ であるから, $C_{j,t} := c_{j,t}\|\langle \cdot \rangle\|_{L^1(\mathbb{R})}$ とおけば,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^j u}{\partial x^j}(t,x) \right| \le C_{j,t}M$$

が成り立つ. □

系 2.2. f を $\mathbb{R}$ 上の連続関数とし, ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して, $M_m := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^m |f(x)| < \infty$ が成り立つとする. このとき, (1.2) で定義される関数 $u(t,\cdot)$ について, 任意の $t > 0$ と任意の $j \ge 0$ に対してある $C_{j,t} > 0$ が存在して,

$$\max_{0\le k\le m} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k \left| \frac{\partial^j u}{\partial x^j}(t,x) \right| \le C_{j,t}$$

が成り立つ.

証明. 関数 f は $\mathbb{R}$ 上連続であるから区間 $[-1,1]$ 上有界であり, したがって任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\max_{|x|\le 1} |x|^k |f(x)| \le \max_{|x|\le 1} |f(x)| < \infty$$

である. また, ある $m \in \mathbb{N}$ について $M_m < \infty$ ならば, 任意の $0 \le k \le m$ について

$$\sup_{|x|>1} |x|^k |f(x)| \le \sup_{|x|>1} |x|^m |f(x)| \le M_m < \infty$$

である. よって, ある $m \in \mathbb{N}$ について $M_m < \infty$ ならば, 任意の $0 \le k \le m$ について $M_k < \infty$ が成り立つ.

$k = 0$ の場合については, 定理 2.1 より評価が得られる. $1 \le k \le m$ の場合は, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $|x|^k \le 2^{k-1}(|x-y|^k + |y|^k)$ が成立することを利用すると, 任意の $x \in \mathbb{R}$, $j \ge 0$ について

$$\begin{aligned} |x|^k \left| \frac{\partial^j u}{\partial x^j}(t,x) \right| \le & 2^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} |x-y|^k |p_{j,t}(x-y)| H(t,x-y) |f(y)|\, dy \\ & + 2^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} |p_{j,t}(x-y)| H(t,x-y) |y|^k |f(y)|\, dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2^{m-1} M_0 \int_{-\infty}^{\infty} |z|^k |p_{j,t}(z)| H(t,z)\, dz \\
&\quad + 2^{m-1} M_k \int_{-\infty}^{\infty} |p_{j,t}(z)| H(t,z)\, dz
\end{aligned}
$$

が成り立ち, 定理 2.1 の証明と同様にしてこの右辺はある定数 $C_{j,t}$ で評価される. したがって, 結論が証明された. □

これを任意の $m \in \mathbb{N}$ に適用すれば, 以下の結論を得る.

系 2.3. f を $\mathbb{R}$ 上の連続関数とし, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $M_m := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^m |f(x)| < \infty$ が成り立つとする. このとき, (1.2) で定義される関数 $u(t,\cdot)$ について, 任意の $t > 0$ に対して $u(t,\cdot) \in \mathcal{S}_x$ となる.

参考文献

[1] W. Craig, *A Course on Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics 197, American Mathematical Society, USA (2018).