熱方程式の解のモーメント評価

川越 大輔

2021 年 4 月 20 日

1　イントロダクション

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とし, n 次元熱方程式の Cauchy 問題

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.1}$$

の解のモーメントについて考察する. ここで, $\mathbb{R}^n$ 上の関数 g に対して, g の (2 次までの) モーメント m_0, $m_{1,j}$, $j = 1, \dots, n$, g_2 は

$$\begin{aligned} m_0(g) &:= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx, \\ m_{1,j}(g) &:= \int_{\mathbb{R}^n} x_j g(x)\,dx, \quad j = 1, \dots, n, \\ m_2(g) &:= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 g(x)\,dx \end{aligned}$$

で与えられるものである. この定義は Boltzmann 方程式の解に対応する巨視的変数の定義を参考にした.

2　熱方程式の解の 0 次モーメント

n 次元熱方程式の基本解は

$$H_n(t,x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

であった. よって, Cauchy 問題 (1.1) の解は

$$u(t,x) = H_n * f(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\,dy$$

と書ける.

この表示を踏まえて Cauchy 問題 (1.1) の解の 0 次モーメントを計算すると, Fubini の定理より

$$m_0(u(t,\cdot)) = \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dx \right) f(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy = m_0(f)
\end{aligned}
$$

が得られる.

3　熱方程式の解の 1 次モーメント

1 次モーメントについては, $|\cdot| f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ を仮定すると, Fubini の定理より

$$
\begin{aligned}
m_{1,j}(u(t,\cdot)) &= \int_{\mathbb{R}^n} x_j u(t,x)\, dx \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} x_j \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} x_j e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dx \right) f(y)\, dy
\end{aligned}
$$

となる. ここで,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} x_j e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dx = &\int_{\mathbb{R}} (x_j - y_j) e^{-\frac{(x_j-y_j)^2}{4t}}\, dx_j \prod_{k \neq j} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_k-y_k)^2}{4t}}\, dx_k \\
&+ y_j \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dx
\end{aligned}
$$

と式変形する. 右辺第 1 項は奇関数の積分となるから 0 であり, 右辺第 2 項は $y_j(4\pi t)^{n/2}$ である. よって,

$$
m_{1,j}(u(t,\cdot)) = \int_{\mathbb{R}^n} y_j f(y)\, dy = m_{1,j}(f)
$$

である.

補足 1. 条件 $|\cdot| f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ により, 函数 f の Fourier 変換像 $\hat{f}$ は C^1 級となる. よって, Craig [1] の 1 次元のモーメント評価が正当化され, これが n 次元の場合に拡張される.

4　熱方程式の解の 2 次モーメント

2 次モーメントについては, $f \geq 0$ を仮定すると, Fubini の定理より

$$
\begin{aligned}
m_2(u(t,\cdot)) &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 u(t,x)\, dx \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} |x|^2 e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dx \right) f(y)\, dy
\end{aligned}
$$

となる. ただし, この計算では, $m_2(u(t,\cdot))=\infty$ となることを許容している. ここで,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dx=&\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}x_j^2e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dx\\ =&\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}(x_j-y_j)^2e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dx\\ &+2\sum_{j=1}^n y_j\int_{\mathbb{R}^n}(x_j-y_j)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dx\\ &+\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}y_j^2e^{-\frac{|x-y|^2}{t}}\,dx\end{aligned}$$

と式変形する. 右辺第 1 項については, 部分積分により

$$\int_{\mathbb{R}}(x_j-y_j)^2e^{-\frac{(x_j-y_j)^2}{4t}}\,dx_j=\int_{\mathbb{R}}(x_j-y_j)(-2t)\frac{\partial}{\partial x_j}e^{-\frac{(x_j-y_j)^2}{4t}}\,dx_j=2t\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{(x_j-y_j)^2}{4t}}\,dx_j$$

となるから,

$$\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}(x_j-y_j)^2e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dx=\sum_{j=1}^n 2t\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dx=2nt(4\pi t)^{n/2}$$

となる. また, 右辺第 2 項は奇関数の積分であるから 0 である. さらに, 右辺第 3 項は

$$\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}y_j^2e^{-\frac{|x-y|^2}{t}}\,dx=|y|^2(4\pi t)^{n/2}$$

である. 以上をまとめて

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}|x|^2e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dx=2nt+|y|^2$$

であり,

$$m_2(u(t,\cdot))=2nt\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\,dy+\int_{\mathbb{R}^n}|y|^2f(y)\,dy=2ntm_0(f)+m_2(f)$$

が得られる.

一般の $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ については, $f_+:=\max\{f(x),0\}$, $f_-:=\max\{-f(x),0\}$ とおき, $f=f_+-f_-$ と分解する. このとき, $f_\pm\in L^1(\mathbb{R}^n)$ であり, $f_\pm\geq 0$ である. さらに初期値を $f_\pm$ とする Cauchy 問題 (1.1) の解をそれぞれ $u_\pm$ とすると, 方程式の線型性から $u=u_+-u_-$ が成り立つ. よって, $m_2(f_+)<\infty$ または $m_2(f_-)<\infty$ を仮定すれば, モーメントの線型性により

$$\begin{aligned}m_2(u(t,\cdot))=&m_2(u_+(t,\cdot))-m_2(u_-(t,\cdot))\\ =&2ntm_0(f_+)+m_2(f_+)-(2ntm_0(f_-)+m_2(f_-))\\ =&2ntm_0(f)+m_2(f)\end{aligned}$$

が成り立つ.

5　今後の課題

5.1　高次のモーメント

今回は 2 次までのモーメント評価を行ったが, 3 次以上についてはどのようなモーメント評価が得られるであろうか?

Craig [1] では, 1 次元の場合に限り任意次数のモーメント評価を与えている．この評価は初期値 f が任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $|\cdot|^k f \in L^1(\mathbb{R})$ を満たすことを仮定すれば正当化される．ξ を $\mathbb{R}^n$ の変数とし, k を multi-index として解釈すれば, これが n 次元での一般次数のモーメント評価を与えることになる．すなわち, multi-index α に対して

$$m_{|\alpha|,\alpha}(u(t,\cdot)) = 2\pi i \partial_\xi^\alpha (\hat{H}(t,\xi)\hat{f}(\xi))|_{\xi=0}$$

である.

なお, 今回は 3 次以上のモーメントの定義を陽には与えていないが, 上式から逆算して定義を検討すれば良い.

5.2　モーメント評価の意味づけ

Boltzmann 方程式であれば, 解の 0 次モーメントが質量, 1 次モーメントが流速, 2 次モーメントが温度にそれぞれ対応していたが, 熱方程式についても同様の解釈は可能であろうか? また, これは物理面からの解釈であるが, 数学面からは何か解釈を与えられないだろうか?

5.3　一般の放物型方程式の解のモーメント評価

今回は熱核の表示を利用して熱方程式の解のモーメント評価を与えたが, 一般の放物型方程式に対して同様のモーメント評価を与えることはできるだろうか?

参考文献

[1] W. Craig, *A Course on Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics 197, American Mathematical Society, USA (2018).