1次元熱方程式の解の一意性

川越 大輔

2021 年 5 月 2 日

本稿では, 1 次元熱方程式の Cauchy 問題

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{0.1}$$

の解の一意性について考察する. 特に, u に有界性を課さない場合には, Cauchy 問題の解は一意とならないことを見る. この例は John [2] を参照した.

以下, $f = 0$ とする. $\alpha > 1$ とし, 関数 $g \in C^\infty([0,\infty))$ を次で定義する.

$$g(t) := \begin{cases} \exp\left(-t^{-\alpha}\right), & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

この関数 g に対しては, 次の評価が成り立つ.

補題 0.1. α のみに依存する正の定数 θ が存在して, 任意の $t > 0$ に対して

$$|g^{(k)}(t)| < \frac{k!}{(\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right)$$

が成り立つ. ただし, $g^{(k)}$ は関数 g の k 階導関数である.

証明. 関数 g の定義域を右半平面 $\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 0, y \in \mathbb{R}\}$ に拡張する. ただし, 必要であれば実軸上で元の実関数 g と一致する分枝を取るものとする. このとき,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x+iy)^{-\alpha} = 0$$

であるから, 関数 g は $\mathbb{H}$ 上の正則関数となる. よって, Cauchy の積分公式より, 任意の $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

が成り立つ. ただし, γ は点 z を囲む $\mathbb{H}$ 内の (求長可能な) 単純閉曲線である. 特に, この公式から

$$g^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{1+k}}\,d\zeta$$

が従う.

今, $z = t > 0$ とし, 閉曲線 γ を中心が t, 半径が θt の円周とする. $0 < \theta < 1$ とすれば, $\gamma \subset \mathbb{H}$ であることに注意する. さらに, θ を十分小さく取れば, γ 上で

$$\mathrm{Re}(z^{-\alpha}) > \frac{1}{2}t^{-\alpha}$$

が成り立つようにすることができる. このように θ を取れば,

$$|g^{(k)}(t)| \leq \frac{k!}{2\pi(\theta t)^{1+k}} \int_\gamma |g(\zeta)|\,|d\zeta| \leq \frac{k!}{(\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right)$$

が得られる. □

この評価を基に, 次の級数 u を考える.

$$u(t,x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}. \tag{0.2}$$

補題 0.1 より, 任意の $t > 0$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k} \right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{k!}{(2k)!(\theta t)^k} x^{2k} \right| \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{\theta t}\right)^k \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right) \\
&= \exp\left(t^{-1}\left(\frac{x^2}{\theta} - \frac{t^{1-\alpha}}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ. すなわち, 級数 u は $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ 上広義一様絶対収束する. また, 任意の $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $g^{(k)}(0) = 0$ であるから, 任意の $x \in \mathbb{R}$ について $u(0,x) = 0$ である.

$(0,\infty) \times \mathbb{R}$ 上の関数 U を

$$U(t,x) := \exp\left(t^{-1}\left(\frac{x^2}{\theta} - \frac{t^{1-\alpha}}{2}\right)\right)$$

で定義する. このとき, 関数 $U(t,x)$ は $t \downarrow 0$ の極限で 0 に収束する. 先の評価から $t > 0$ において $|u(t,x)| \leq U(t,x)$ であるから, 任意の $x \in \mathbb{R}$ について

$$\lim_{t \downarrow 0} u(t,x) = 0$$

である. すなわち, 関数 u は $[0,\infty) \times \mathbb{R}$ 上連続で, $u(0,x) = 0$ である.

また, u に項別微分を施すと,

$$\begin{aligned}
u_t(t,x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k+1)}(t)}{(2k)!} x^{2k}, \\
u_{xx}(t,x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k-2)!} x^{2k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k+1)}(t)}{(2k)!} x^{2k}
\end{aligned}$$

が得られる. 再び補題 0.1 より, 任意の $t>0$ と $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{g^{(k+1)}(t)}{(2k)!}x^{2k}\right|\le\frac{1}{\theta t}\exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right)\left\{1+\frac{x^2}{\theta t}\exp\left(\frac{x^2}{\theta t}\right)\right\}$$

が成り立つから, 左辺の級数は $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上広義一様絶対収束する. よって, 項別微分は $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上の各点で正当化され, $u_t=u_{xx}$ が成り立つ.

以上より, (0.2) 式で定義される関数 u は Cauchy 問題 (0.1) の古典解である. 一方, 関数 $u=0$ も解であるから, Cauchy 問題 (0.1) の古典解は一意でないことが分かる.

補足 1. このような例を排除して一意性を保証するには, 次の条件が十分であることが知られている: ある正の定数 M と a が存在して, 任意の $t>0$ と $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$|u(t,x)|\le Me^{a|x|^2}$$

が成り立つ.

参考文献

[1] W. Craig, *A Course on Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics 197, American Mathematical Society, USA (2018).

[2] F. John, *Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences 1, Fourth Edition, Springer, New York (1982).