解析学 I 演習 10　　　　担当　木上

演習 10.1. 次の積分の $n \to \infty$ の極限を求めよ。

$$(1)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}dx \quad (2)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin e^x}{1+nx^2}dx \quad (3)\ \int_0^1 \frac{n\cos x}{1+n^2x^{3/2}}dx$$

演習 10.2. $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ とする。このとき f が $[0,+\infty)$ 上広義 Riemann 積分の意味で可積分ならば $\mathcal{L}_1$-可測かつ m_1-可積分であることを示せ。

演習 10.3. $(t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$ に対して、

$$P(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\Big(-\Big(\frac{x^2}{4t}\Big)\Big)$$

とおく。また $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ 上連続かつ有界な関数とする。
(1)　任意の $(t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}$ に対して $y \in \mathbb{R}$ の関数として $P(t,x-y)f(y)$ は Lebesgue 可積分であることを示せ。
(2)　$t > 0, x \in \mathbb{R}$ に対して

$$F(t,x) = \int_{\mathbb{R}} P(t,x-y)f(y)dy$$

と定義する。このとき F は $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ 上連続であることを示せ。
(3)　任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $t \downarrow 0$ で $F(t,x) \to f(x)$ を示せ。

[ヒント：(3) $z = (x-y)/(4t)^{1/2}$ と変数変換する。]

演習 10.4. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間、$f_n, f : X \to \mathbb{R}^*$ は可測とする。いま $n \to \infty$ で $\int_X |f_n - f|d\mu \to 0$ ならば $n \to \infty$ で f_n は f に確率収束することを示せ。