解析学 I 演習 10 解答

解答 10.1.

(1)　$n \geq 2$ に対し

$$\frac{1}{1+x^n} \leq \min\{1, 1/x^2\}$$

であり，$\min\{1, 1/x^2\}$ は $(0,\infty)$ 上可積分なので，Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}\,dx = \int_0^\infty \chi_{(0,1)}(x)\,dx = 1.$$

(2)

$$\left|\frac{\sin e^x}{1+nx^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

であり，$\frac{1}{1+x^2}$ は $(0,\infty)$ 上可積分なので，Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin e^x}{1+nx^2}\,dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\frac{\sin e^x}{1+nx^2}\,dx = \int_0^\infty 0\,dx = 0.$$

(3)　$y = nx$ と変数変換すれば，

$$\int_0^1 \frac{n\cos x}{1+n^2x^{3/2}}\,dx = \int_0^n \frac{\cos(y/n)}{1+n^{1/2}y^{3/2}}\,dy = \int_0^\infty \left\{\frac{\cos(y/n)}{1+n^{1/2}y^{3/2}} \times \chi_{(0,n)}\right\}dy.$$

いま，

$$\left|\frac{\cos(y/n)}{1+n^{1/2}y^{3/2}} \times \chi_{(0,n)}\right| \leq \frac{1}{1+y^{3/2}}$$

であり，$\frac{1}{1+y^{3/2}}$ は $(0,\infty)$ 上可積分なので，Lebesgue の収束定理により

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n\cos x}{1+n^2x^{3/2}}\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left\{\frac{\cos(y/n)}{1+n^{1/2}y^{3/2}} \times \chi_{(0,n)}\right\}dy \\ &= \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\cos(y/n)}{1+n^{1/2}y^{3/2}} \times \chi_{(0,n)}\right\}dy = \int_0^\infty 0\,dy = 0.\end{aligned}$$

(別解) $x>0$，$n \geq 1$ に対し，$n^{-1} + nx^{3/2} \geq 2x^{3/4}$ より次の評価

$$\left|\frac{n\cos x}{1+n^2x^{3/2}}\right| \leq \frac{n}{1+n^2x^{3/2}} = \frac{1}{n^{-1}+nx^{3/2}} \leq \frac{1}{2}x^{-3/4}$$

を得る．すると $x^{-3/4}$ は $(0,1)$ 上可積分なので Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n\cos x}{1+n^2x^{3/2}}dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{\cos x}{n^{-1}+nx^{3/2}}dx = \int_0^1 0dx = 0.$$

注意. • 被積分関数の可測性について悩んでいる者がいたが，いずれも連続関数なので明らかにBorel 可測である．また被積分関数の極限として現れる関数も，可測関数の各点収束極限（あるいは，適当な区間上に制限すれば連続）なのでやはり Borel 可測である．このようにごく簡単な議論で可測性がわかる場合には答案の中で可測性の証明を行う必要はない．しかしそれは容易だから一々書かないというだけのことであって，可測性の確認は常に必要である．
• (1), (2) において，「被積分関数は 1 で抑えられるから Lebesgue の収束定理により...」という議論をしようとしている者が相当数いたが，$m_1((0,\infty)) = \infty$ なので，**1 は $(0,\infty)$ 上では可積分ではない**．また，被積分関数の一様収束性に基づいて極限を求めようとしている者もいたが，$m_1((0,\infty)) = \infty$ であるため**一様収束していても積分と関数列の極限の順序交換はできるとは限らない**．このように，(有界集合の上の）Riemann 積分の場合には当然と思っていたことが全測度が無限大の場合には成り立たなくなったりするので，注意が必要である．

• $(1+x^2)^{-1}$ などの関数の可積分性を確認する際に Riemann 積分と Lebesgue 積分の差異を気にしている者が数名いたが，演習 10.2 の議論のように定理 2.5.1 と単調収束定理を用いると

$$\int_{(0,\infty)} \frac{1}{1+x^2} dm_1 = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{1}{1+x^2} dx$$

（左辺は Lebesgue 測度による積分，右辺は広義 Riemann 積分）であることがわかる．したがって後は Riemann 積分における通常の計算を行って右辺の積分値が有限であることを示せばよい．
　また一般の非負値とは限らない関数 f に対しても，f_+ と f_- に分けて同様の議論を行うと

絶対収束する広義 Riemann 積分は Lebesgue 可積分であり，広義 Riemann 積分と Lebesgue 測度による積分の値は等しい

ことも示すことができる．(なお絶対収束しない広義 Riemann 積分に対しては同様の主張は一般に不成立である．講義中の例 2.5.4 を参照してほしい．)

解答 10.2.　$f_n := f\chi_{[0,n]}$ $(n = 1, 2, ...)$ とおく．仮定より，f は区間 $[0, n]$ 上 Riemann 可積分なので，f_n は Lebesgue 可測であり，ゆえに $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ も可測．f_n は正値単調増大列なので，単調収束定理より

$$\int f\, dm_1 = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, dm_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\, dx = \int_0^\infty f(x)\, dx < \infty.$$

すなわち，f は Lebesgue 可積分である．

解答 10.3.　**問題の訂正：(2) の $F(t,x)$ の定義における積分範囲 $\int_0^1$ を $\int_{\mathbb{R}}$ に修正して下さい．**
(1)　任意の $t > 0, x \in \mathbb{R}$ に対して $P(t, x-y)f(y)$ は $y \in \mathbb{R}$ について連続，従って Lebesgue 可測関数である．$M = \sup_{y\in\mathbb{R}} |f(y)|$ とおくと，$|P(t,x-y)f(y)| \le M(4\pi t)^{-1/2} \exp(-(x-y)^2/4t)$ であり，右辺は y について $\mathbb{R}$ 上可積分である．よって $P(t,x-y)f(y)$ は y について $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 可積分である．
(2)　任意に $t_0 > 0, x_0 \in \mathbb{R}$ をとり，$\{(t_n, x_n)\}_{n=1}^\infty$ を $\lim_{n\to\infty}(t_n, x_n) = (t_0, x_0)$ なる任意の列とする．n が十分大きいとき

$$\frac{t_0}{2} < t_n < \frac{3t_0}{2}, \quad |x_n - x_0| < t_0$$

が成り立つ．このとき

$$(y-x_n)^2 \geq \frac{(y-x_0)^2}{2} - (x_n-x_0)^2 \geq \frac{(y-x_0)^2}{2} - t_0^2$$

であることに注意する (はじめの不等式は $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ において $a=y-x_n, b=x_n-x_0$ とおいたものから得られる)．従って

$$\begin{aligned}|P(t_n, x_n-y)f(y)| &\leq M\frac{1}{\sqrt{4\pi t_n}}\exp\left(-\frac{(y-x_n)^2}{4t_n}\right) \\ &\leq M\frac{1}{\sqrt{4\pi(t_0/2)}}\exp\left(-\frac{(y-x_0)^2/2-t_0^2}{4(3t_0/2)}\right) \\ &\leq C_{M,t_0}\exp\left(-\frac{(y-x_0)^2/2}{6t_0}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで C_{M,t_0} は M と t_0 にのみ依存する数であり，最後の函数は n に依存しない可積分函数である．さらに P の連続性により任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して $\lim_{n\to\infty} P(t_n, x_n-y)f(y) = P(t_0, x_0-y)f(y)$ が成り立つ．よって Lebesgue の収束定理により $\lim_{n\to\infty} F(t_n, x_n) = F(t_0, x_0)$ が成り立ち F は連続である．(この問題の解答では f の連続性は必要でない．)

(3) $x \in \mathbb{R}$ を任意に固定する．$z = (x-y)/(4t)^{1/2}$ と変数変換すると

$$F(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-z^2)f(x-(4t)^{1/2}z)dz$$

となる．任意の $t>0$ に対して $|\exp(-z^2)f(x-(4t)^{1/2}z)| \leq M\exp(-z^2)$ が成り立ち，右辺は t に依存しない可積分函数である．さらに f の連続性により任意の $z \in \mathbb{R}$ に対して $\lim_{t\downarrow 0}\exp(-z^2)f(x-(4t)^{1/2}z) = \exp(-z^2)f(x)$ である． よって Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{t\downarrow 0} F(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-z^2)f(x)dz = f(x)$$

が成り立つ．

解答 10.4. $\forall\varepsilon > 0$ に対して，$E_{n,\varepsilon} := \{x \in X|\ |f_n(x)-f(x)| \geq \varepsilon\}$ とおくと，

$$\int |f_n - f|d\mu \geq \int_{E_{n,\varepsilon}} |f_n-f|d\mu \geq \varepsilon\mu(E_{n,\varepsilon}).$$

が成り立つ．ゆえに

$$\mu(E_{n,\varepsilon}) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int |f_n-f|d\mu \to 0 \qquad (\text{as}\quad n\to\infty).$$