解析学 I 演習 11　　　　　担当　木上

演習 11.1. $i = 1, 2, 3$ について $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ は測度空間とする。
(1)　$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3 = (\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \otimes \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_1 \otimes (\mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3)$ を示せ。
(2)　$i = 1, 2, 3$ について $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ は σ-有限とする。このとき、$(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$ を示せ。

演習 11.2. $i = 1, 2$ に対して $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ は σ-有限な測度空間、$f_i : X_i \to \mathbb{R}^*$ は $\mathcal{M}_i$-可測とする。ここで $(x, y) \in X_1 \times X_2$ に対して $g(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ と定義する。さらに $X = X_1 \times X_2, \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \mu = \mu_1 \times \mu_2$ とおく。
(1)　g は $\mathcal{M}$-可測であることを示せ。
(2)　$i = 1, 2$ で f_i が μ_i-可積分ならば g は μ-可積分であり、

$$\int_X g d\mu = \int_{X_1} f_1 d\mu_1 \int_{X_2} f_2 d\mu_2$$

が成り立つことを示せ。

[ヒント：(1) $F(x, y) = f_1(x), G(x, y) = f_2(y)$ とおけば F, G は $\mathcal{M}$-可測]

演習 11.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を σ-有限な測度空間、$f : X \to \mathbb{R}_+^*$ は $\mathcal{M}$-可測とする。このとき、$S = \{(x, y) | x \in X, 0 < y < f(x)\}$ とおけば $S \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}_1$ であり $\int_X f d\mu = (\mu \times m_1)(S)$ が成り立つことを示せ。

[ヒント：f は単関数の単調非減少列の極限]

演習 11.4. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を σ-有限な測度空間、$f : X \to [0, +\infty)$ は $\mathcal{M}$-可測とする。
(1)　$A = \{(x, t) | x \in X, t \in [0, +\infty), f(x) > t\}$ とおく。このとき $A \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}_1$ を示せ。
(2)　$A_t = \{x | x \in X, f(x) > t\}$ とするとき、$\mu(A_t) = \int_X \chi_A(x, t) d\mu(x)$ を示せ。
(3)　$p \in [1, +\infty)$ に対して

$$\int_X f^p d\mu = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(A_t) dt$$

を示せ。（この等式は分布等式とよばれるものである。）