解析学 I 演習 11 解答

解答 11.1.

(1)　$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3 = (\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \otimes \mathcal{M}_3$ を示す．($\mathcal{M}_1 \otimes (\mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3)$ についても同様．)

$\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_3 \subset (\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \times \mathcal{M}_3 \subset (\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \otimes \mathcal{M}_3$ より $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3 \subset (\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \otimes \mathcal{M}_3$ が成り立つので，逆の包含関係を示せばよい．

任意の $B \in \mathcal{M}_3$ に対して $\mathcal{U} := \{A \subset X_1 \times X_2 | \ A \times B \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3\}$ を考えれば，$\mathcal{U} \supset \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ であるから，$\mathcal{U}$ が σ-加法族であることを示せば十分である．(なぜならこのとき $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{U}$ より $(\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \times \mathcal{M}_3 \subset \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3$.) $X_1 \times X_2 \in \mathcal{U}$，および，$\{A_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{U} \Longrightarrow \cup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{U}$ は明らか．$A \in \mathcal{U}$ のとき，$A^C \times B = (X_1 \times X_2 \times B) \setminus A \times B \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3$ より $A^C \in \mathcal{U}$．以上により題意は示された．

(2)　(1) より，$(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3$ と $\mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$ はともに $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3 = \sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_3)$ 上の測度であり，$\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_3$ 上では一致している．また $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_3$ は乗法族であり，さらに各 $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ は σ-有限であるから定理 1.3.10 の仮定 (EX2) が満たされる．したがって定理 1.3.10 により $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3 = \sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_3)$ 上で $(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3$ と $\mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$ は一致する．すなわち $(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$.

解答 11.2.

(1)　$F(x,y) = f_1(x), G(x,y) = f_2(y)$ とおく．f_1 の $\mathcal{M}_1$-可測性により

$$\{(x,y) \mid F(x,y) > a\} = \{x \mid x \in X_1, f_1(x) > a\} \times X_2 \in \mathcal{M} \ (\forall a \in \mathbb{R})$$
$$\{(x,y) \mid F(x,y) = \pm\infty\} = \{x \mid x \in X_1, f_1(x) = \pm\infty\} \times X_2 \in \mathcal{M} \ (\text{複号同順})$$

であるから F は $\mathcal{M}$-可測である．同様に G も $\mathcal{M}$-可測である．$g = FG$ であるから g も $\mathcal{M}$-可測である．

(2)　$i = 1, 2$ に対して $\int_{X_i} |f_i| d\mu_i < +\infty$ であるから，

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f_1(x) f_2(y)| d\mu_1 \right) d\mu_2 = \int_{X_1} |f_1| d\mu_1 \int_{X_2} |f_2| d\mu_2 < +\infty.$$

従って g は μ-可積分であり，Fubini の定理により

$$\int_X g d\mu = \int_{X_1} f_1 d\mu_1 \int_{X_2} f_2 d\mu_2$$

が成り立つ．

（別解） まず f_1, f_2 が非負値であると仮定し，f_1, f_2 にそれぞれ各点収束する単関数の単調増大列 $\{f_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}, \{f_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ をとる．このとき $g_n(x,y) := f_n^1(x) f_n^2(y)$ とおき，$f_n^1 = \sum_{k=1}^{n_1} a_k \chi_{A_k}$, $f_n^2 = \sum_{\ell=1}^{n_2} b_\ell \chi_{B_\ell}$ と表すと $g_n = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{\ell=1}^{n_2} a_k b_\ell \chi_{A_k \times B_\ell}$ であるから

$$\begin{aligned} \int_X g_n d\mu &= \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{\ell=1}^{n_2} a_k b_\ell \mu(A_k \times B_\ell) = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{\ell=1}^{n_2} a_k b_\ell \mu_1(A_k) \mu_2(B_\ell) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n_1} a_k \mu_1(A_k) \right) \left(\sum_{\ell=1}^{n_2} b_\ell \mu_2(B_\ell) \right) = \int_{X_1} f_n^1 d\mu_1 \int_{X_2} f_n^2 d\mu_2. \end{aligned} \tag{11.1}$$

$0 \le g_n \le g_{n+1}$ であり g_n は g に各点収束するので，(11.1) で $n \to \infty$ として単調収束定理により $\int_X g d\mu = \int_{X_1} f_1 d\mu_1 \int_{X_2} f_2 d\mu_2$ を得る．

f_1, f_2 が非負値とは限らない場合には $f_1 = f_1^+ - f_1^-$, $f_2 = f_2^+ - f_2^-$ と分けると先の議論により

$$\int_X f_1^\pm f_2^\pm d\mu = \int_{X_1} f_1^\pm d\mu_1 \int_{X_2} f_2^\pm d\mu_2, \qquad \int_X f_1^\pm f_2^\mp d\mu = \int_{X_1} f_1^\pm d\mu_1 \int_{X_2} f_2^\mp d\mu_2 \quad \text{（複号同順）}$$

が成り立ち，f_1, f_2 の可積分性の仮定からこれら 4 つの積分はすべて有限値である．したがって $g = f_1^+ f_2^+ - f_1^+ f_2^- - f_1^- f_2^+ + f_1^- f_2^-$ も可積分であって，$\int_X g d\mu$ は

$$\begin{aligned}&\int_{X_1} f_1^+ d\mu_1 \int_{X_2} f_2^+ d\mu_2 - \int_{X_1} f_1^+ d\mu_1 \int_{X_2} f_2^- d\mu_2 - \int_{X_1} f_1^- d\mu_1 \int_{X_2} f_2^+ d\mu_2 + \int_{X_1} f_1^- d\mu_1 \int_{X_2} f_2^- d\mu_2 \\ &= \int_{X_1} f_1 d\mu_1 \int_{X_2} f_2 d\mu_2.\end{aligned}$$

に等しい．これが示すべきことであった．

解答 11.3. はじめに f が単函数であるときに示す．f を $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$, ただし $\alpha_i > 0, E_i \in \mathcal{M}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ $(i \ne j)$, と表したとき $S = \cup_{i=1}^n E_i \times (0, \alpha_i)$ (disjoint union) であるから，$S \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}_1$ であり

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i) m_1((0, \alpha_i)) = (\mu \times m_1)(S)$$

が成り立つ．

次に $f : X \to \mathbb{R}_+^*$ は $\mathcal{M}$-可測とする。$\mathcal{M}$-可測な非負単函数の非減少列 $\{f_n\}$ で各点で f に収束するものを一つとって $S_n = \{(x, y) \mid x \in X, 0 < y < f_n(x)\}$ とおく．このとき各 n に対して $S_n \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}_1$, $\int_X f_n d\mu = (\mu \times m_1)(S_n)$ が成り立つ．さらに $S_n \subseteq S_{n+1} (n \in \mathbb{N})$, $\lim S_n = S$ となっているから，$S \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}_1$ であり

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} (\mu \times m_1)(S_n) = (\mu \times m_1)(S).$$

解答 11.4.

(1) $\phi : (x, t) \mapsto f(x) - t$ は $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}_1$ -可測関数なので，$A = \phi^{-1}(0, +\infty) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}_1$.

(2) 明らか.

(3)

$$\begin{aligned}p\int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(A_t)\, dt &= p\int_0^{+\infty} t^{p-1} \int_X \chi_A(x, t)\, d\mu(x)\, dt && \text{((2) より)} \\ &= \int_X \left(\int_0^{+\infty} p\, t^{p-1} \chi_A(x, t)\, dt \right) d\mu(x) && \text{(Fubini の定理より)} \\ &= \int_X \left(\int_0^{f(x)} p\, t^{p-1}\, dt \right) d\mu(x) \\ &= \int_X f(x)^p\, d\mu(x).\end{aligned}$$