解析学 I 演習 12　　　　　　　　担当　木上

演習 12.1. 任意の $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ に対して実数 $a_{n,m}$ が与えられているとする。
(1)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{+\infty}|a_{n,m}|\Big) < +\infty$$

ならば

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{+\infty}a_{n,m}\Big) = \sum_{m=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n,m}\Big)$$

を示せ。
(2)　(1) の仮定が成り立たないとき (1) の結論は成り立つか？

演習 12.2. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を σ-有限な測度空間とする。$n \geq 1$ に対して、$f_n : X \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{M}$-可測かつ μ-可積分とする。

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_X |f_n(x)|dx < +\infty$$

が成り立つとき、μ-a.e. $x \in X$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ が成り立つことを示せ。

演習 12.3. (X, d) を距離空間、$(X, \mathcal{M}, \mu)$ は Borel 正則な測度空間で、任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して、

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf\{\mu(U) | U \text{ は } A \text{ を含む開集合}\}\\ &= \sup\{\mu(F) | F \text{ は } A \text{ に含まれる閉集合}\}\end{aligned}$$

が成り立つとする。
(1)　$A \in \mathcal{M}$ で $\mu(A) < +\infty$ とする。このとき、任意の $\epsilon > 0$ に対してある連続関数 $F : X \to \mathbb{R}$ があって、$\int_X |F - \chi_A| d\mu < \epsilon$ となることを示せ。
(2)　$f : X \to \mathbb{R}$ は可測かつ可積分とする。このとき、任意の $\epsilon > 0$ に対してある連続関数 $F : X \to \mathbb{R}$ があって、$\int_X |F - f| d\mu < \epsilon$ となることを示せ。

[ヒント：(1) $F \subseteq A \subseteq O, \mu(O \backslash F) < \epsilon$ となる開集合 O, 閉集合 F をとり、F, O^c に対して Urysohn の補題をつかう。(2) 単関数による近似]