解析学 I 演習 12 解答

解答 12.1.
(1)　$(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$（$\#$ は counting measure）は σ-有限な測度空間であり，その直積測度空間は $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2), \# \times \#)$ となる．$\{a_{n,m}\}_{n,m\geq 1}$ を $\mathbb{N}^2$ 上の実数値函数と考えれば $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$-可測であるから，Fubini の定理より $\{a_{n,m}\}_{n,m\geq 1}$ は $\# \times \#$ 可積分であり，題意が成り立つ．
(2)　成り立たない．反例として，

$$a_{n,m} = \begin{cases} 1 & m = n \\ -1 & m = n+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を考えればこれは (1) の条件を満たしておらず，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} 0 = 1$$

となり，和の順序によって異なる値をとる．

解答 12.2.　解答その 1: 単調収束定理により

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n(x)|\, d\mu < \infty$$

が成り立つ．ゆえに μ-a.e. $x \in X$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$ であり，μ-a.e. $x \in X$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ が従う．
解答その 2: $\varphi(x,n) := f_n(x)$ とおけば，φ は $\mathcal{M} \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})$-可測であるから，Fubini の定理と仮定により，

$$\begin{aligned} \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \right) d\mu(x) &= \int_X \left(\int_{\mathbb{N}} |\varphi(x,n)|\, d\#(n) \right) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{N}} \left(\int_X |\varphi(x,n)|\, d\mu(x) \right) d\#(n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X |f_n(x)|\, d\mu(x) \right) < \infty \quad . \end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに μ-a.e. $x \in X$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$ であり，μ-a.e. $x \in X$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ が従う．
補足: 解答その 1 では，$(X, \mathcal{M}, \mu)$ に対する σ-有限性の仮定は不要だが，解答その 2 では，Fubini の定理を使うためにこの仮定が必要となる．

解答 12.3. 講義ノートの §3.1 を参照して下さい.

解答 12.4. 講義ノートの §3.1 を参照して下さい.