解析学 I 演習 1 解答

解答 1.1. 明らかに $m_*(\gamma([0,1]))=0$ だから，$m^*(\gamma([0,1]))=0$ を示せばよい．

$\gamma_i,(i=1,2)$ は $[0,1]$ 上 C^1 級なので，$M_i:=\max_{t\in[0,1]}|\gamma_i'(t)|$ が存在する．そこで $M=\max\{M_1,M_2\}$ とおく．n を自然数とし，$t_k:=\frac{k}{n},\ k=0,1,...,n$ とおけば，$\forall t\in[t_k,t_{k+1}]$ に対して，

$$|\gamma_i(t)-\gamma_i(t_k)|\leq\int_{t_k}^{t}|\gamma_i'(s)|ds\leq\int_{t_k}^{t_{k+1}}|\gamma_i'(s)|ds\leq M\frac{1}{n}$$

が成り立つ．そこで $A_k^{(n)}:=\{(x,y)|\,|x-\gamma_1(t_k)|\leq M/n,\ |y-\gamma_2(t_k)|\leq M/n\}$ とすれば，上の評価より $\gamma([0,1])\subset\cup_{k=0}^{n}A_k^{(n)}$ が成り立ち，

$$\sum_{k=0}^{n}m\left(A_k^{(n)}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{4M^2}{n^2}=\frac{4M^2(n+1)}{n^2}\to0,\qquad \text{as}\quad n\to\infty$$

より $m^*(\gamma([0,1]))=0$ が従う．

解答 1.2. $D=\{x\in A|$ ある番号より大きいすべての n に対して $x\in B_n\}$ より，

$$\begin{aligned}x\in D&\Leftrightarrow\exists m\in\mathbb{N}\text{ s.t. }x\in B_n\ (\forall n\geq m)\\&\Leftrightarrow\exists m\in\mathbb{N}\text{ s.t. }x\in\cap_{n\geq1}B_n.\end{aligned}$$

ゆえに $D=\cup_{m\geq1}(\cap_{n\geq m}B_n)$ である．

$C=\{x\in A|$ 無限個の n に対して $x\in B_n\}$ の補集合は

$$C^c=\{x\in A|\ \text{ある番号より大きいすべての}\ n\ \text{に対して}\ x\in(B_n)^c\}$$

であるから，$C^c=\cup_{m\geq1}(\cap_{n\geq m}(B_n)^c)$ が成り立つ．よってド・モルガンの公式により

$$\begin{aligned}C&=(\cup_{m\geq1}(\cap_{n\geq m}(B_n)^c))^c=\cap_{m\geq1}(\cap_{n\geq m}(B_n)^c)^c\\&=\cap_{m\geq1}(\cup_{n\geq m}B_n).\end{aligned}$$

解答 1.3.

「長さ」の定義

(1) $I\subset\mathbb{R}$ が区間であるとは，$I=[a,b](:=\{x\in\mathbb{R}:a\leq x\leq b\}),(a<b)$ とあらわせること．区間 $I=[a,b]\ (a<b)$ に対しては，$|I|:=b-a$ とする．

(2) $J\subset\mathbb{R}$ が区間塊であるとは，$J=\cup_{n=1}^{N}I_n$,(各 I_n は区間) とあらわせること．$J=\cup_{n=1}^{N}I_n, I_n=[a_n,b_n], I_n\cap I_m=\emptyset(n\neq m)$ に対しては，$|J|:=\sum_{n=1}^{N}|I_n|$ とする．

(3) 一般の有界な集合 $A\subset\mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}l^*(A)&:=\inf\{|J|:J\supset A,\ J\ \text{は区間塊}\ \}\\l_*(A)&:=\sup\{|J|:J\subset A,\ J\ \text{は区間塊}\ \}\end{aligned}$$

とする．ただし，$\sup\emptyset = 0$ とする．

有界な集合 $A \subset \mathbb{R}$ が (Jordan) 可測とは,

$$l^*(A) = l_*(A)$$

が成立すること．可測な集合 A に対しては,

$$l(A) = l^*(A)$$

と定義する．

$U = \{1/n : n = 1, 2, \cdots\}$ は長さが 0 であること

明らかに $l_*(U) = 0$ なので，$l^*(U) = 0$ を示せば，U は可測で $l(U) = 0$ がいえる．自然数 n を任意に固定する．

$$A_k^{(n)} := \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{2n^2}, \frac{1}{k} + \frac{1}{2n^2}\right] \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$
$$A_n^{(n)} := \left[0, \frac{1}{n}\right]$$

とすると，$U \subset \cup_{k=1}^n A_k^{(n)}$ で，$\cup_{k=1}^n A_k^{(n)}$ が区間塊なので,

$$\begin{aligned} l^*(U) &\leq \sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}| \\ &= \frac{n-1}{n^2} + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

したがって,

$$0 \leq l^*(U) \leq \frac{2n-1}{n^2}$$

が任意の自然数 n が成立するので，$n \to \infty$ とすれば，$l^*(U) = 0$ をえる．

注意. • $\mathbb{R}^2$ における「多角形」（3 角形の有限和）の類推から、「区間塊」を区間の「有限和」と定義していることに注意してほしい。区間の「可算無限和」を区間塊の代わりに用いて l_*, l_* のようなものを定義している答案が散見されたが、そのような解答は本問の趣旨に反しており、認められない。従ってまた $U = \{1/n : n = 1, 2, \ldots\}$ の長さが 0 であることを示す際には、区間塊、すなわち区間の**「可算無限和」ではなく「有限和」**で U を覆わなくてはならないことにも注意してほしい。この点を満足している答案はごく少数であった。

• 上記の解答において、区間塊 $J \subset \mathbb{R}$ に対し **$|J|$ と $l^*(J), l_*(J)$ は別物であり、「区間塊 J が Jordan 可測で $|J| = l(J)$ である」ことは別途証明する必要がある**（$|J|$ と $l^*(J), l_*(J), l(J)$ のように記号を使い分けているのはそのため）。証明は次の事実

$$I, J \subset \mathbb{R} \text{ が区間塊で } I \subset J \Rightarrow |I| \leq |J| \tag{1.1}$$

と l^*, l_* の定義を用いればよい。(1.1) の証明はそれほど難しくないので、ぜひ考えてみてほしい。