解析学 I 演習 2　　　　　　　担当　木上

演習 2.1. 測度の定義において、(M2) を次の (M2)' で置き換えても同値な定義が得られることを示せ。
(M2)' 任意の $A, B \in \mathcal{M}$ に対して、$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

演習 2.2. $X = \{1, 2, 3\}$ とする。X の σ-加法族 をすべて挙げよ。

演習 2.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。さらに $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}$ とする。
(1)　$B_1 = A_1$, $n \geq 2$ で $B_n = A_n \backslash \cup_{i=1}^{n-1} B_i$ とするとき $\cup_{n \geq 1} A_n = \cup_{n \geq 1} B_n$ を示せ。
(2)　$\mu(\cup_{n \geq 1} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ を示せ。（この事実を測度の劣加法性という。）

演習 2.4. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。さらに $\{A_n\}_{n \geq 1}, \{B_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}$ とする。このとき

$$\mu\Big(\bigcup_{n \geq 1} A_n \backslash \bigcup_{n \geq 1} B_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \backslash B_n)$$

を示せ。

演習 2.5. $X = \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{P}(X)$ 上で定義された測度 $\#$ を考える。このとき $\{A_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{P}(X)$ で、任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $A_i \supseteq A_{i+1}$ を満たすが、$\lim_{n \to \infty} \#(A_n) = \#(\cap_{n \geq 1} A_n)$ を満たさないものの例をあげよ。

演習 2.6. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。さらに $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}$ とする。
(1)　$\big(\limsup_{n \to \infty} A_n\big)^c = \liminf_{n \to \infty} (A_n)^c$ を示せ。
(2)　$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$ のとき、次を示せ。

$$\mu(\limsup_{n \to \infty} A_n) = 0, \mu(\liminf_{n \to \infty} (A_n)^c) = \mu(X)$$

この事実を Borel-Cantelli（ボレルーカンテリ）の定理いう。確率論では重要な定理である。
[ヒント] $\mu(\limsup_{n \to \infty} A_n) \leq \mu(\cup_{n \geq m} A_n)$, μ の劣加法性をつかえ。