解析学 I 演習 3　　　　　　　　担当　木上

演習 3.1. X を集合とする。いま $\mathcal{M} = \{A | A$ あるいは A^c が可算集合$\}$ とすると $\mathcal{M}$ は σ-加法族になることを示せ。さらに $\mathcal{M}_0 = \{A | A$ あるいは A^c が有限集合$\}$ とするとき $\sigma(\mathcal{M}_0) = \mathcal{M}$ であることを示せ。

演習 3.2. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし、$\mathcal{B}(X, \mathcal{O})$ をその Borel 集合族とする。
(1)　$\mathcal{C}$ を $(X, \mathcal{O})$ の閉集合の全体とする。このとき $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(X, \mathcal{O})$ を示せ。
(2)　$(X, \mathcal{O})$ が第 2 可算公理を満たすとする。このとき $(X, \mathcal{O})$ の可算な基底 $\mathcal{U}$ に対して、$\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B}(X, \mathcal{O})$ であることを示せ。

演習 3.3. (X, d) を可分な距離空間とし、$\mathcal{B}(X)$ を (X, d) から定義される位相に関する Borel 集合族とする。
(1)　$x \in X, r \geq 0$ に対して、$\overline{B}_r(x) = \{y | y \in X, d(x, y) \leq r\}$ とおき、$\mathcal{A} = \{\overline{B}_r(x) | x \in X, r > 0\}$ とするとき、$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(X)$ を示せ。
(2)　$X = \mathbb{R}^n$, d をユークリッドの距離とする。$i = 1, \ldots, n$ に対して、$a_i \leq b_i$ のとき $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = \{(x_1, \ldots, x_n) |$ 任意の i で $x_i \in [a_i, b_i]\}$ とし $\mathcal{U}$ をこのような形の集合をすべて集めたものとする。このとき $\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ を示せ。

演習 3.4. X, Λ を集合、任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\mathcal{A}_\lambda$ を X の Dynkin 族とする。このとき、$\cap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ も Dynkin 族であることを示せ。

演習 3.5. X を集合、$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ とする。$\mathcal{A}$ に関する条件 (D3)' を次のように定義する。
(D3)'　$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ で任意の n に対して $A_n \subseteq A_{n+1}$ ならば $\cup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$
$\mathcal{A}$ が X の Dynkin 族であるための必要十分条件は、(D1), (D2) かつ (D3)' であることを示せ。