解析学 I 演習 3 解答

注意. まず σ-加法族の生成に関して全般的な注意を述べておく．X を集合，$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ とする．
(1) 講義で扱われた $\sigma(\mathcal{A})$ の定義の式

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap \{\mathcal{M} \mid \mathcal{A} \subset \mathcal{M},\ \mathcal{M} \text{ は } X \text{ の } \sigma\text{-加法族}\} \tag{3.1}$$

は，$\mathcal{A}$ を含む最小の X の σ-加法族の**存在証明にのみ用いられる**ものであると心得てほしい．実際に $\sigma(\mathcal{A})$ について論じる際には $\sigma(\mathcal{A})$ が (3.1) で与えられるということはどうでもよく，単に

$$\boldsymbol{\sigma(\mathcal{A})\text{は「}\mathcal{A}\text{を含む}X\text{の}\sigma\text{-加法族のうちで最小のもの」である}} \tag{3.2}$$

という事実のみに依拠して話を進めればよいのである．例えば演習 3.1~3.3 の答案に「$\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ となる X の σ-加法族 $\mathcal{M}$ を任意にとると . . .」という議論をしているものがいくつかみられたが，単に $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$ であるとして議論すれば十分なのである．
(2) **$\sigma(\mathcal{A})$ の元 A は $\mathcal{A}$ の元の可算和や可算共通部分，あるいはまたそれらの可算和や可算共通部分，. . . などを用いて具体的に書き表せるとは限らない**[1]．従って，$A \in \sigma(\mathcal{A})$ をとってきて A に対して直接に何かを論じるのはほとんどの場合困難である．$\sigma(\mathcal{A})$ と表される σ-加法族の間の包含関係に関する議論は**「$A \in \mathcal{A}$ たちに対して具体的な議論をした後，(3.2) や Dynkin 族定理（定理 1.3.8）を用いる」**という方針でなされると考えてまず間違いないので，覚えておくとよい．

解答 3.1.　・$\mathcal{M}$ が σ-加法族であること
　まず $\emptyset \in \mathcal{M}$ は明らか．次に $A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow$ “A^c あるいは $(A^c)^c$ が高々可算集合” $\Leftrightarrow A^c \in \mathcal{M}$ である．最後に $A_i \in \mathcal{M}, i \in \mathbb{N}$ に対して $A := \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$ を示す．(a) すべての i に対して A_i が高々可算のとき，A も高々可算である．(b) ある j に対して $(A_j)^c$ が高々可算のとき，$A^c = \cap_{i=1}^{\infty}(A_i)^c \subset (A_j)^c$ より A^c が高々可算．(a), (b) いずれからも $A \in \mathcal{M}$ が従う．ゆえに $\mathcal{M}$ は σ-加法族である．
・$\sigma(\mathcal{M}_0) = \mathcal{M}$ であること
　高々可算濃度の集合は一点からなる集合 $(\in \mathcal{M}_0)$ の高々可算個の和集合である．よって $\mathcal{M} \subset \sigma(\mathcal{M}_0)$ である．一方 $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ より $\sigma(\mathcal{M}_0) \subset \mathcal{M}$ である．ゆえに $\sigma(\mathcal{M}_0) = \mathcal{M}$ である．

解答 3.2.
(1)　$\mathcal{C} = \{O^c | \ O \in \mathcal{O}\}$，$\mathcal{O} = \{C^c | \ C \in \mathcal{C}\}$ であるから，$\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(X, \mathcal{O})$, $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{C})$．よって $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(X, \mathcal{O})$ である．
(2)　第 2 可算公理により，任意の開集合は基底 $\mathcal{U}$ に属する高々可算個の開集合の和集合として表されるから，$\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{U})$ が成り立つ．これと $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ より $\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B}(X, \mathcal{O})$ を得る．

解答 3.3.
(1)　$\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}(X)$ は明らか．
　$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ とおき，$\mathcal{A}' := \{B_r(x) \mid x \in X, r > 0\}$ とすれば，$\sigma(\mathcal{A}') \subset \sigma(\mathcal{A})$ が成り立つ.（なぜなら $\forall B_r(x) \in \mathcal{A}'$ に対して $B_r(x) = \cup_{n \geq 1} \overline{B}_{r-1/n}(x) \in \sigma(\mathcal{A})$.）そこで $\sigma(\mathcal{A}') = \mathcal{B}(X)$ を示せばよい．

[1] あらゆる操作を可算無限回まで許容することで，関係する和集合，共通部分の添字集合の濃度がしばしば非可算になってしまうため．

(X,d) は可分なので X の稠密で可算な部分集合 X' が存在する．そこで $\mathcal{U} := \{B_r(x) |\ x \in X', r > 0, r \in \mathbb{Q}\} \subset \mathcal{A}'$ を考えると，これは (X,d) の位相の可算な基底になっている．よって演習 3.2.(2) より $\sigma(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{A}') = \mathcal{B}(X)$ が成り立つ．

(2) $d_\infty(x,y) := \max_{1\le j\le n} |x_j - y_j|$ とすると，$d_\infty(x,y) \le d(x,y) \le \sqrt{n} d_\infty(x,y)$ より d_∞ とユークリッド距離 d は同値になる．従って d_∞ から定義される位相に関する Borel 集合族を $\mathcal{B}_\infty(\mathbb{R}^n)$ で表すことにすれば，$\mathcal{B}_\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．

$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ は可分な距離空間なので，(1) において $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ としたときの $\mathcal{A}$ を $\mathcal{A}_{d_\infty}$ と表すことにすると，(1) により $\sigma(\mathcal{A}_{d_\infty}) = \mathcal{B}_\infty(\mathbb{R}^n)$ がわかる．また，$\overline{B}_r(x) = \prod_{j=1}^n [x_j - r, x_j + r]$ と書けることから $\mathcal{A}_{d_\infty} \subset \mathcal{U}$，よって $\mathcal{B}_\infty(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{A}_{d_\infty}) \subset \sigma(\mathcal{U})$．一方 $\mathcal{U}$ の各元は $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ の閉集合だから演習 3.2 (1) を用いて $\sigma(\mathcal{U}) \subset \mathcal{B}_\infty(\mathbb{R}^n)$．よって $\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B}_\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$．

補足：可分でない距離空間で (1) が成立しない例

$X = \mathbb{R}$ として，距離を $d(x,y) = 0$ ($x = y$ のとき), 1 ($x \ne y$ のとき) で定義する．

$B_r(x) := \{y \in X |\ d(y,x) < r\}$ とすると，$r < 1$ のとき $B_r(x) = \{x\}$，$r \ge 1$ のとき $B_r(x) = X$．これより 1 点集合が開集合になるので，任意の部分集合は開集合であり，かつ閉集合となる．特に，任意の部分集合に対してその閉包は自分自身になるので (X,d) は可分でない．

$\mathcal{B}(X)$ が部分集合全体になるのは明らか．一方，$\mathcal{A} = \{\emptyset, X\} \cup \{\{x\} |\ x \in X\}$ から，$\sigma(\mathcal{A}) = \{A \subset X |\ A$ または A^cが高々加算集合$\}$ となることが簡単にわかるので，例えば $A = \{x \in X |\ x > 0\}$ とすれば，$A \in \mathcal{B}(X)$ であるが，$A \notin \sigma(\mathcal{A})$ となる．

解答 3.4. $\mathcal{A} = \cap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とおく．はじめに各 $\mathcal{A}_\lambda$ が Dynkin 族であるから，$X \in \mathcal{A}_\lambda$ $(\forall\lambda \in \Lambda)$. よって $X \in \mathcal{A}$ である．次に $A, B \in \mathcal{A}$, $A \supset B$ であるとき，各 $\mathcal{A}_\lambda$ が Dynkin 族であるから $A \subset B \in \mathcal{A}_\lambda$ $(\forall\lambda \in \Lambda)$ となり，$A \setminus B \in \mathcal{A}$ が従う．最後に $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \ne j)$ であるとき，各 $\mathcal{A}_\lambda$ が Dynkin 族であるから $\cup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}_\lambda$ $(\forall\lambda \in \Lambda)$ となり，$\cup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$ が従う．以上により，$\mathcal{A}$ は Dynkin 族である．

解答 3.5. まず $\mathcal{A}$ が（講義中の定義 1.3.6 (2) の意味で）X の Dynkin 族であると仮定する．(D3)' を示せばよい．$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ は $A_n \subset A_{n+1}$, ${}^\forall n \in \mathbb{N}$ を満たすとする．このとき $A := \cup_{n\ge1} A_n \in \mathcal{A}$ であることを示せばよい．$B_1 := A_1$ $(\in \mathcal{A})$，$n \ge 2$ に対し $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ とおく．$A_{n-1} \subset A_n$, ${}^\forall n \ge 2$ と (D2) により $B_n \in \mathcal{A}$，また $i \ne j$ なら $B_i \cap B_j = \emptyset$ である。よって (D3) により $\cup_{n\ge1} B_n \in \mathcal{A}$. 明らかに $\cup_{n\ge1} B_n \subset A$．他方 $x \in A$ に対し $n(x) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid x \in A_n\}$ とすると $n(x) = 1$ なら $x \in A_1 = B_1$，$n(x) \ge 2$ なら $x \in A_{n(x)} \setminus A_{n(x)-1} = B_{n(x)}$. 従って $x \in \cup_{n\ge1} B_n$ となり，$A = \cup_{n\ge1} B_n \in \mathcal{A}$．よって (D3)' が成立する．

次に $\mathcal{A}$ が (D1), (D2), (D3)' を満たすと仮定する。まず、次を示そう。

$$A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}. \tag{3.3}$$

$A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B$ とする．(D1) より $X \in \mathcal{A}$．すると (D2) より $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$. $A \cap B = \emptyset$ より $B \subset A^c$ なので再び (D2) により $A^c \cap B^c = A^c \setminus B \in \mathcal{A}$．よって $A \cup B = X \setminus (A^c \cap B^c) \in \mathcal{A}$. さて、(D3) を示すために $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ は $i \ne j$ なら $A_i \cap A_j = \emptyset$ を満たすとする．$\cup_{n\ge1} A_n \in \mathcal{A}$ を示せばよいが，(3.3)（と帰納法）により $B_n := \cup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$．明らかに任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $B_n \subset B_{n+1}$ なので，(D3)' により $\cup_{n\ge1} A_n = \cup_{n\ge1} B_n \in \mathcal{A}$．したがって (D3) が成り立つ．