解析学 I 演習 4　　　　　担当　木上

演習 4.1. 測度空間 $(X, \mathcal{P}(X), \#)$ (ただし $\#$ は要素の個数）が σ-有限であるための必要十分条件は X の濃度が高々可算であることを示せ。

演習 4.2. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}, \nu)$ を測度空間とし、$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ のユークリッドの距離に関する Borel 集合族とする。また $\mathcal{U}$ を $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ の形の集合を集めたもの（$\emptyset$ も含む）とする。いま $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \supset \mathcal{U}$ であり、任意の $A \in \mathcal{U}$ に対して $\mu(A) = \nu(A) < +\infty$ が成り立つならば $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ であり、$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上 μ と ν は一致することを示せ。

演習 4.3. (1) X を集合、$\mathcal{M}$ を X 上の σ-加法族とする。$Y \subseteq X$ に対して、$\mathcal{M}|_Y = \{A \cap Y | A \in \mathcal{M}\}$ と定義するとき、$\mathcal{M}|_Y$ は Y 上の σ-加法族になることを示せ。さらに $Y \in \mathcal{M}$ ならば $\mathcal{M}|_Y \subset \mathcal{M}$ を示せ。
(2) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$Y \in \mathcal{M}$ とする。このとき $\mu|_Y = \mu|_{\mathcal{M}|_Y}$ と定義すれば $(Y, \mathcal{M}|_Y, \mu|_Y)$ は測度空間となることを示せ。
(3) X を集合、$X = Y \cup Z, Y \cap Z = \emptyset$ とする。いま $\mathcal{M}_Y, \mathcal{M}_Z$ をそれぞれ Y, Z の σ-加法族とする。このとき

$$\mathcal{M}_Y \oplus \mathcal{M}_Z = \{A \cup B | A \in \mathcal{M}_Y, B \in \mathcal{M}_Z\}$$

とおけば、$\mathcal{M}_Y \oplus \mathcal{M}_Z$ は X の σ-加法族であることを示せ。

演習 4.4. $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ とし、$i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{0,1\}$ に対して

$$\Sigma_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \{a_1 a_2 \ldots | a_1 a_2 \ldots \in \Sigma, a_1 = i_1, a_2 = i_2, \ldots, a_n = i_n\}$$

とし $\mathcal{A} = \{\Sigma_{i_1 i_2 \ldots i_n} | n \geq 1, i_1, \ldots, i_n \in \{0,1\}\} \cup \{\emptyset, \Sigma\}$ とおく。
(1)　$\mathcal{A}$ は乗法族であることを示せ。
(2)　$A \in \mathcal{A}$ とする。Σ に $\{0,1\}$ の無限直積としての直積位相をいれておく。このとき直積位相の定義より A は開集合であることを示せ。さらに、ある $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$ があって $A^c = \cup_{i=1}^m A_i$ であることを示し、これを用いて A は閉集合でもあることを証明せよ。
(3) $\sigma(\mathcal{A})$ は Σ の Borel 集合族と一致することを示せ。
(4) $(\Sigma, \mathcal{B}(\Sigma), P_1), (\Sigma, \mathcal{B}(\Sigma), P_2)$ が測度空間で P_1 と P_2 が $\mathcal{A}$ 上一致するなら、$P_1 = P_2$ を示せ。