解析学 I 演習 5　　　　　　担当　木上

演習 5.1. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間, Y を集合、$f : X \to Y$ とする。
(1)　$\mathcal{N} = \{A | A \subseteq Y, f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$ は σ-加法族となることを示せ。
(2)　$A \in \mathcal{N}$ に対して $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ と定義する。このとき $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ は測度空間になることを示せ。
(3)　$(Y, \mathcal{N}, \nu)$ が σ-有限ならば $(X, \mathcal{M}, \mu)$ も σ-有限であることを示せ。またこの逆は成り立つか？
(4)　$(X, \mathcal{M}, \mu)$ が完備ならば $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ も完備であることを示せ。
(5)　X, Y が位相空間であり f は連続とする。$\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{M}$ ならば $\mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{N}$ を示せ。
(6)　(5) の条件のもとで、$(X, \mathcal{M}, \mu)$ が Borel 正則ならば $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ も Borel 正則と言えるか？
ν を f による μ の像測度といい、$\nu = \mu \circ f^{-1}$ あるいは $f_*\mu$ などと書く。

演習 5.2. $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu)$ を測度空間とし、$\mu([0,1]) < +\infty$ とする。いま任意の $x \in [0,1]$ に対して、$\mu(\{x\}) = 0$ とする。このとき次の問いに答えよ。
(1)　任意の $x \in (0,1)$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して x を含む開区間 U で $\mu(U) < \epsilon$ をみたすものが存在することを示せ。
(2)　任意の $\epsilon > 0$ に対して $[0,1]$ の稠密な開集合 O で $\mu(O) < \epsilon$ をみたすものが存在することを示せ。

演習 5.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を σ-有限な測度空間であり任意の $x \in X$ に対して $\{x\} \in \mathcal{M}$ とする。
(1)　$U \in \mathcal{M}$ かつ $\mu(U) < +\infty$ とする。いま

$$Y_{U,n} = \{x | x \in U, \mu(\{x\}) \geq 1/n\}$$

とおくとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $Y_{U,n}$ は有限集合であることを示せ。
(2)　$\{x | x \in X, \mu(\{x\}) > 0\}$ は高々可算集合であることを示せ。

演習 5.4. (X, d) を孤立点を持たない可分な距離空間とする。$(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ を測度空間とし、$\mu(X) < +\infty$ とする。このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して X の稠密な開集合 O があって、$\mu(O) < \epsilon$ となることを示せ。