解析学 I 演習 5 解答

解答 5.1.　解答例を述べる前に 1 つ注意をしておく．$\mathcal{N}$ や ν はあくまで $f : X \to Y$ による逆像 $f^{-1}(\cdot)$ を用いて定義されているのであり，**$A \in \mathcal{M}$ の f による像 $f(A)$ と $\mathcal{N}$ との間に何かわかりやすい関係があるわけではない**（以下の (3) の補足で触れるように，必ずしも無関係というわけでもないが）．$A \in \mathcal{M}$ をとって $f(A)$ を考えると... という書き出しで始まる答案を数枚見かけたが，それは **$\mathcal{N}$ や ν の定義を誤解した完全な誤答である**．

(1)　$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{M}$ より $\emptyset \in \mathcal{N}$．

$A \in \mathcal{N}$ とする．$\mathcal{N}$ の定義より $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ なので，$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c \in \mathcal{M}$．したがって，$A^c \in \mathcal{N}$．

$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{N}$ とする．$\mathcal{N}$ の定義より $f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2), \cdots \in \mathcal{M}$ なので，$f^{-1}(\cup_{n\geq1}A_n) = \cup_{n\geq1}f^{-1}(A_n) \in \mathcal{M}$．したがって，$\cup_{n\geq1}A_n \in \mathcal{N}$．

(2)　$\nu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$.

$A, B \in \mathcal{N}$, $A \cap B = \emptyset$ とする．このとき，

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset \tag{*}$$

なので，

$$\begin{aligned}
\nu(A \cup B) &= \mu(f^{-1}(A \cup B)) \\
&= \mu(f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)) \\
&= \mu(f^{-1}(A)) + \mu(f^{-1}(B)) && \text{((*) と μ が測度であることより)} \\
&= \nu(A) + \nu(B).
\end{aligned}$$

$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{N}$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ とする．このとき，

$$f^{-1}(A_1) \subset f^{-1}(A_2) \subset \cdots \tag{**}$$

なので，

$$\begin{aligned}
\nu(\cup_{n\geq1}A_n) &= \mu(f^{-1}(\cup_{n\geq1}A_n)) \\
&= \mu(\cup_{n\geq1}f^{-1}(A_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(f^{-1}(A_n)) && \text{((**) と μ が測度であることより)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \nu(A_n).
\end{aligned}$$

(3)　$(Y, \mathcal{N}, \nu)$ が σ-有限なので，$Y_1, Y_2, \cdots \in \mathcal{N}$, $\cup_{n\geq1}Y_n = Y$, $\nu(Y_n) < \infty (n = 1, 2, \cdots)$ となるものが存在する．

$X_n := f^{-1}(Y_n)$ とする．このとき，$Y_n \in \mathcal{N}$ より，$X_n = f^{-1}(Y_n) \in \mathcal{M}$ であり，

$$\begin{aligned}
\cup_{n\geq1}X_n &= \cup_{n\geq1}f^{-1}(Y_n) \\
&= f^{-1}(\cup_{n\geq1}Y_n) \\
&= f^{-1}(Y) && \text{($\cup_{n\geq1}Y_n = Y$ より)} \\
&= X.
\end{aligned}$$

また，$\mu(X_n) = \mu(f^{-1}(Y_n)) = \nu(Y_n) < \infty$ なので，$(X, \mathcal{M}, \mu)$ が σ-有限であることがわかる．

逆は成り立たない：$X = \mathbb{N}$, ,$\mathcal{M} = \mathcal{P}$, $\mu = \#$ とすれば，$(X, \mathcal{M}, \mu)$ は σ-有限な測度空間．$Y := \{0\}$, $f(n) := 0$ $(\forall n)$ とすると，$\mathcal{N} = \{\emptyset, Y\}$ であり，$\nu(Y) = \infty$ なので，$(Y, \mathcal{N}, \nu)$ は σ-有限にはならない．

なお，f が単射であれば逆が成り立つことが次のようにしてわかる：$f : X \to Y$ は単射，$(X, \mathcal{M}, \mu)$ は σ-有限であると仮定し，$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ で $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ かつ任意の $n \geq 1$ で $\mu(X_n) < \infty$ となるものを選ぶ．$Y_0 := Y \setminus f(X)$ とし，$n \geq 1$ に対し $Y_n := f(X_n)$ とする．すると

$$Y = Y_0 \cup f(X) = Y_0 \cup f(\cup_{n=1}^{\infty} X_n) = Y_0 \cup \left(\cup_{n=1}^{\infty} f(X_n)\right) = \cup_{n \geq 0} Y_n.$$

$f^{-1}(Y_0) = \emptyset \in \mathcal{M}$ だから $Y_0 \in \mathcal{N}$，$\nu(Y_0) = \mu(f^{-1}(Y_0)) = \mu(\emptyset) = 0 < \infty$. また $n \geq 1$ に対し，f の単射性から $f^{-1}(Y_n) = f^{-1}(f(X_n)) = X_n \in \mathcal{M}$ なので，$Y_n \in \mathcal{N}$ であり $\nu(Y_n) = \mu(f^{-1}(Y_n)) = \mu(X_n) < \infty$. よって $(Y, \mathcal{N}, \mu)$ は σ-有限である．

注意. このように，$A \in \mathcal{M}$ に対し $f(A)$ を考えてまともな議論ができるためには f の単射性が必要である．f が単射でない場合，$f(A)$ はえてしてよくわからない集合になってしまうことが多い．

(4) $B \in \mathcal{N}$, $\nu(B) = 0$, $A \subset B$ とする．$B \in \mathcal{N}$ より $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ であり，$\nu(B) = 0$ より $\mu(f^{-1}(B)) = 0$ である．いま，$A \subset B$ なので，$f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ となるが，$\mu(f^{-1}(B)) = 0$ なので，$(X, \mathcal{M}, \mu)$ の完備性により $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$，したがって $A \in \mathcal{N}$ をえる．

(5) Y の任意の開集合が $\mathcal{N}$ に含まれることをいえばよい．

$U \subset Y$ を開集合とする．f が連続なので，$f^{-1}(U)$ は X の開集合．ゆえに $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}(X)$ であるが，いま，$\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}$ なので，$f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$ をえる．したがって，$U \in \mathcal{N}$.

(6) 言えない．次のような反例がある．

$X = \mathbb{N}$，$\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ とし，その上の測度 $\mu := \#$（couting measure）を考える．さらに $Y = \mathbb{N}$ とし，f は X から Y への恒等写像とする．（$\mathcal{N} = \mathcal{P}(Y)$，$\nu = \#$ となる．）ここで，X に離散位相，Y に密着位相を入れれば f は連続となり，問題の条件を全て満たす．ところがこのとき，$\{n\} \in \mathcal{P}(Y)$ に対して $\nu(\{n\}) = 1$ であるが，これを近似する Borel 集合は存在しない．（よって全ての有限集合が上からも下からも近似不可．）ゆえに $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ は Borel 正則にならない．

さらに,「f が開写像であれば正しい」とする誤答が 6 年前の講義のときにあった（らしい）ので，それに対する反例も挙げておく．

$X := \{-1, 0, 1, 2\}$ とし，X の位相を次で定める；

$$\mathcal{O}_X := \{\emptyset, \{-1, 0\}, \{-1, 0, 1\}, X\}.$$

$Y := \{0, 1, 2\}$ とし，Y の位相を次で定める；

$$\mathcal{O}_Y := \{\emptyset, \{0, 1\}, Y\}$$

$f : X \to Y$ を，$f(x) := |x|$ とする．(つまり，$f(0) = 0, f(-1) = f(1) = 1, f(2) = 2$) f が連続になることは簡単に確認でき，さらに f は開写像でもある．

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(X) &= \{\emptyset, \{-1, 0\}, \{-1, 0, 1\}, \{-1, 0, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, X\} \\
\mathcal{B}(Y) &= \{\emptyset, \{0, 1\}, \{2\}, Y\}
\end{aligned}$$

である．

$\mathcal{M} := \mathcal{B}(X)$, $\mu := \#$ とする．明らかに $(X, \mathcal{M}, \mu)$ は Borel 正則．

いま，$\mathcal{N} = \mathcal{P}(Y)$ となるが，$\{1\} \subset B$, $\nu(\{1\}) = \nu(B)$ となる $B \in \mathcal{B}(Y)$ が存在しない．したがって，$(Y, \mathcal{N}, \nu)$ は Borel 正則ではない．

なお，後に講義の第 3 章で扱われる（はず）の定理を用いて，「X が可分完備距離（付け可能な位相）空間，$\mu(X) < \infty$ で Y が Hausdorff 空間であれば」(6) の主張は正しいことが証明できる．

解答 5.2.

(1) $U_n := (x - 1/n, x + 1/n) \cap (0, 1)$ とおけばこれは単調減少で，$\cap_{n \geq 1} U_n = \{x\}$．$\mu([0, 1]) < \infty$ より

$$\lim_{n \to \infty} \mu(U_n) = \mu(\cap_{n \geq 1} U_n) = \mu(\{x\}) = 0 \tag{5.1}$$

が成り立つから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\exists n$ が存在して $\mu(U_n) < \varepsilon$.

(2) $(0, 1)$ の有理数全体を番号付けして $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ とおけば，(1) より各点 x_n に対して $\mu(U_n) < \varepsilon/2^n$ となるような開近傍が存在する．$O := \cup_{n \geq 1} U_n$ を考えれば，明らかに $[0, 1]$ で稠密な開集合であり，その測度は

$$\mu(O) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) < \varepsilon.$$

注意. (1) で極限移行 (5.1) を行うためには，ある $n \geq 1$ で $\mu(U_n) < \infty$ であることを保証する必要があるということを思い出して欲しい．答案中で何の断りもなく (5.1) のような式を書いている答案が数枚あったが，そのような答案は理解不十分と見なさざるを得ない．**ある種の特別な仮定を要する操作を行う際にはその操作が可能であることの根拠を答案中に明示すべきである**．

解答 5.3.

(1) 背理法で示す．

$Y_{U,n}$ が無限集合である，とする．すなわち，$x_1, x_2, \cdots \in U$, $\mu(\{x_n\}) \geq 1/n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ となる列 $\{x_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が取れる．このとき，m を自然数とすると

$$\begin{aligned} \mu(U) &\geq \mu(\cup_{n=1}^{nm} \{x_n\}) \\ &\geq \sum_{n=1}^{nm} \mu(\{x_n\}) \\ &\geq m \end{aligned}$$

が成り立つが，いま，m は任意だったので，$m \to \infty$ とすれば，$\mu(U) = \infty$ をえる．これは $\mu(U) < \infty$ に矛盾する．したがって，$Y_{U,n}$ は有限集合．

(2) いま，$(X, \mathcal{M}, \mu)$ は σ-有限な測度空間なので，$X_1, X_2, \cdots \in \mathcal{M}$, $\cup_{k \geq 1} X_k = X$, $\mu(X_k) < \infty$ $(k = 1, 2, \cdots)$ となる $X_1, X_2, \cdots$ が存在する．(1) より $Y_{X_k,n}$ は有限集合．

$$\{x \in X | \mu(\{x\}) > 0\} = \cup_{k \geq 1, n \geq 1} Y_{X_k,n}$$

であり，右辺が高々可算集合なので，左辺も高々可算集合．

解答 5.4. はじめに，任意の $x \in X$ と $\epsilon > 0$ に対してある $r > 0$ が存在して $\mu(\dot{B}(x;r)) < \epsilon$ が成り立つことを示す．ここで $\dot{B}(x;r) = \{y \mid y \in X, 0 < d(y,x) < r\}$ とおいた．開集合の減少列 $\{\dot{B}(x;1/n)\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\cap_{n=1}^{\infty}\dot{B}(x;1/n) = \emptyset$ が成り立つ．さらに $\mu(\dot{B}(x;1)) \leq \mu(X) < +\infty$ であるから $\lim_{n\to\infty}\mu(\dot{B}(x;1/n)) = 0$ が従う．ゆえに十分大きい n に対して $\mu(\dot{B}(x;1/n)) < \epsilon$ が成り立つ．

本題の証明に入る．可分性により X の可算部分集合 C が存在して $X = \mathrm{cl}(C)$ が成り立つ．集合 C の元に番号を付けて $C = \{x_1, x_2, \dots\}$ とする．任意に $\epsilon > 0$ をとるとき，各 i に対して $r_i > 0$ が存在して $\mu(\dot{B}(x_i;r_i)) < \epsilon/2^i$ が成り立つ．ここで $O = \cup_{i=1}^{\infty}\dot{B}(x_i;r_i)$ とおくと，O は $\mu(O) < \epsilon$ を満たす開集合である．さらに X が孤立点を持たないから各 $x_i \in C$ に対して $x_i \in \mathrm{cl}(\dot{B}(x_i;r_i)) \subset \mathrm{cl}(O)$, ゆえに $C \subset \mathrm{cl}(O)$ が成り立つ． 従って $X = \mathrm{cl}(C) \subset \mathrm{cl}(O)$, すなわち O は X において稠密である．ゆえにこの O は題意を満たす．