解析学 I 演習 6　　　　　　　　担当　木上

演習 6.1. (1)　$f : [0,1] \to [0,\infty)$ は $[0,1]$ 上連続であるとする。このとき、$G_f = \{(x,y)|x \in [0,1], 0 \leq y \leq f(x)\}$ は $G_f \in \mathcal{L}_2$ であり、$m_2(G_f) = \int_0^1 f(x)dx$ が成り立つことを示せ。
(2)　(1) において「f が $[0,1]$ 上連続」という仮定を「f が $[0,1]$ 上 Riemann 可積分」に代えても同じ結論が成り立つことを示せ。

演習 6.2. $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ は $\mathbb{R}$ 上連続かつ単調非減少であるとする。$\mathcal{R} = \{[a,b]|a,b \in \mathbb{R}\}$ とし、$A = [a,b] \in \mathcal{R}$ に対して、$a \leq b$ のときは、

$$h(A) = f(b) - f(a)$$

$a > b$ のときは $h(A) = 0$ と定義する。このとき、$\mathbb{R}$ 上の Borel 正則かつ完備な測度 μ で任意の $A \in \mathcal{R}$ に対して $h(A) = \mu(A)$ を満たすものがただ一つ存在することを示せ。

演習 6.3. $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ とする。いま、$a = a_1a_2\ldots, b = b_1b_2\ldots \in \Sigma$ に対して、

$$d(a,b) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i}$$

とおくとき、d は Σ 上の距離であり、Σ の $\{0,1\}$ の無限直積としての位相と同じ位相をあたえることを示せ。

演習 6.4. $p_0, p_1 > 0, p_0 + p_1 = 1$ とする。表の出る確率が p_0, 裏の出る確率が p_1 のコインを無限回投げることにする。このとき次の各の事象は重み (p_0, p_1) の Bernoulli 測度で可測であることを示し、さらにその確率を求めよ。
(1)　いつかは表がでる。
(2)　表が無限回でる。
(3)　n 回目で表、$n+1$ 回目で裏、$n+2$ 回目で表となる n が無限個ある。