解析学 I 演習 6 解答

解答 6.1.

(1)　f が連続という仮定から G_f は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であり，特に $G_f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ である．よって $G_f \in \mathcal{L}_2$. また f の連続性より f は $[0,1]$ 上 Riemann 可積分である．$m_2(G_f) = \int_0^1 f(x)dx$ の証明は (2) とまったく同様なので次の (2) を参照のこと．

(2)　f は $[0,1]$ 上 Riemann 可積分なので特に $[0,1]$ 上有界であることに注意する．$n \geq 1$ と $1 \leq k \leq 2^n$ に対し $m_{n,k} := \inf\{f(x) \mid (k-1)/2^n \leq x \leq k/2^n\}$, $M_{n,k} := \sup\{f(x) \mid (k-1)/2^n \leq x \leq k/2^n\}$ とおき，また $n \geq 1$ に対し

$$L_n := \bigcup_{k=1}^{2^n} \Big[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\Big] \times [0, m_{n,k}], \quad L := \bigcup_{n\geq 1} L_n,$$
$$U_n := \bigcup_{k=1}^{2^n} \Big[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\Big] \times [0, M_{n,k}], \quad U := \bigcap_{n\geq 1} U_n$$

とおく．$L, U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ であり，また明らかに任意の $n \geq 1$ に対し $L_n \subset L_{n+1} \subset G_f \subset U_{n+1} \subset U_n$ であるので，$L \subset G_f \subset U$．さらに

$$m_2(L_n) = \sum_{k=1}^{2^n} m_{n,k} \cdot \frac{1}{2^n},$$
$$m_2(U_n) = \sum_{k=1}^{2^n} M_{n,k} \cdot \frac{1}{2^n}$$

であり，これらは区間 $[0,1]$ の分割 $0 = 0/2^n < 1/2^n < 2/2^n < \cdots < 2^n/2^n = 1$ に対する f の下方および上方 Riemann 和であるから，f の Riemann 可積分性から $\lim_{n\to\infty} m_2(L_n) = \lim_{n\to\infty} m_2(U_n) = \int_0^1 f(x)dx$．任意の $n \geq 1$ に対し $m_2(L_n) \leq m_2(L) \leq m_2(U) \leq m_2(U_n)$ であるから $n \to \infty$ として $m_2(L) = m_2(U) = \int_0^1 f(x)dx$ を得る．すると $m_2(U) < \infty$，$L \subset U$ より $m_2(U \setminus L) = 0$．よって $L, U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), L \subset G_f \subset U, m_2(U \setminus L) = 0$ がわかったので，$G_f \in \mathcal{L}_2$ であり $m_2(G_f) = m_2(L) = \int_0^1 f(x)dx$.

注意. 上記の解答のように L, U を作ると $L = U = G_f$ である，と主張している者が数名いたが，

1. f が（Riemann 可積分であっても）連続でなければ正しくない．（反例：$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を，$f(1) := 0$，また $x \in [0,1)$ に対し $f(x) := x$ と定めると，U は $\{1\} \times (0,1]$ を含むがこれは G_f には含まれない．$L = G_f$ に対する反例は次を参照のこと．）だから上記の解答のように，m_2 での測度が等しい Borel 集合で G_f を上下から挟むという手続きを踏む必要がある．

2. f が**連続であっても**$L = G_f$ は多くの場合正しくない（反例：$f(x) = x$ とすると，$x \in [0,1]$ が $x = k/2^n, n \geq 1, 0 \leq k \leq 2^n$ と表せる有理数でなければ $(x, f(x)) \notin L$．よって $L \subsetneq G_f$.）

3. f が連続なら $U = G_f$ は証明できるので，(1) においてはこれを用いると容易に $m_2(G_f) = \int_0^1 f(x)dx$ を示すことができる．しかしこの事実を使う場合答案の中でその証明を（簡単

にでいいから）述べる必要がある．（そもそも証明抜きで正しいと決めつけるから上の 1. や 2. のような間違いが起こる．）

証明は例えば次のようにする：$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus G_f$ とするとき，$x<0$ または $x>1$ または $y<0$ なら $(x,y) \notin U$. $x \in [0,1], y \geq 0$ のときは $(x,y) \notin G_f$ より $y > f(x)$．$M := (y+f(x))/2$ とおくと $M > f(x)$ であり，f は x において連続なので $\delta > 0$ を $z \in [0,1], |z-x| \leq \delta$ なら $f(z) \leq M$ となるように選ぶことができる．すると $n \geq 1$ が $2^{-n} \leq \delta$ を満たせば $(x,y) \notin U_n$, よって $(x,y) \notin U$．したがって $\mathbb{R}^2 \setminus G_f \subset \mathbb{R}^2 \setminus U$ なので $U \subset G_f$.

解答 6.2.　まず，問題では f は $[0,\infty)$ 値であると仮定しているが，$\mathbb{R}$ 値としてもまったく同様の証明により同様の主張が成り立つことを注意しておこう．以下 f は $\mathbb{R}$ 値であるものとして解答例を示す（が，解答自体に変更はない）．

講義中の定理 1.4.3 の諸条件が $X = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{R}, \nu = h$ とした場合に成立することを示そう．h は単調非減少（つまり $a,b \in \mathbb{R}, a<b$ なら $h(a) \leq h(b)$）なので $h : \mathcal{R} \to [0,\infty)$ である．講義でも扱われたように $\mathcal{R}$ は乗法族であり，明らかに (CM4) が成り立つ．

(CM1)：$a,b \in \mathbb{R}, a > b$ とすると $\emptyset = [a,b] \in \mathcal{R}$ であり h の定義により $h(\emptyset) = 0$.

(CM3)：$A, B \in \mathcal{R}$ とする．$A \cap B = \emptyset$ であれば，$A \cap B^c = A$ なので $h(A) = h(A\cap B) + h(A)$ となり，A, B は (CM3) に述べられた性質を持つ．そこで $A \cap B \neq \emptyset$ とする．$A\cap B \in \mathcal{R}, A \cap B \subset A$ に注意すると．$A = [a,b]$, $A\cap B = [c,d]$, $a \leq c \leq d \leq b$ と表すことができる．このとき $A \cap B^c \subset [a,c] \cup [d,b]$ であり,

$$\begin{aligned} h(A) = f(b) - f(a) &= (f(d) - f(c)) + \big((f(c) - f(a)) + (f(b) - f(d))\big) \\ &= h(A \cap B) + \big(h([a,c]) + h([d,b])\big). \end{aligned}$$

したがって A, B は (CM3) に述べられた性質を持つ.

(CM2)：補題 1.5.3 の条件 (a)-1, (a)-2, (b), (c) が $X = \mathbb{R}, \mathcal{O} = \mathbb{R}$ の通常の位相，$\mathcal{A} = \mathcal{A}' = \mathcal{R}$ と今の h に対して成り立つことを示せばよい．(a)-2 と (b) は明らかであり，(a)-1 は f の連続性から従う．(c)，すなわち

$$n \geq 1,\ \ A, A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{R},\ \ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \Longrightarrow \quad h(A) \leq \sum_{i=1}^{n} h(A_i) \tag{6.1}$$

を n についての数学的帰納法で示そう．f は単調非減少だから $n=1$ のとき (6.1) は明らかである．$n \geq 2$ とし，$n-1$ のときの (6.1) の成立を仮定しよう．$A, A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$ を (6.1) の通りとする．$A = \emptyset$ なら結論の不等式は明らかだから $A \neq \emptyset$ としてよく，$\mathcal{R}$ は乗法族なので A_i の代わりに $A \cap A_i$ を考えることで $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$ としてよい．また $A_n = \emptyset$ なら帰納法の仮定より即座に $h(A) \leq \sum_{i=1}^{n} h(A_i)$ がわかるので，$A_n \neq \emptyset$ としてよく，さらに $A_n = A$ の場合も主張は明らかだから $A_n \subsetneqq A$ としてよい．このとき $\emptyset \neq A_n \subsetneqq A$ だから，A は $A = [a,b], a<b$ と表され，かつ $A \setminus A_n$ は $\mathbb{R}$ の閉集合ではない．$A \setminus A_n = \cup_{i=1}^{n-1} A_i \setminus A_n$ だから，ある $i \leq n-1$ に対し $A_i \setminus A_n \neq A_i$，すなわち $A_i \cap A_n \neq \emptyset$ となる．$i = n-1$ としてよい．このとき $j < n-1$ に対して $B_j := A_j$，また $B_{n-1} := A_{n-1} \cup A_n$ とおくとき，$\{B_j\}_{j=1}^{n-1} \subset \mathcal{R}, A = \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j$ となるので帰納法の仮定により $h(A) \leq \sum_{j=1}^{n-1} h(B_j) = \sum_{j<n-1} h(A_j) + h(B_{n-1})$. $h(B_{n-1})$ については直接調べる

ことにより容易に $h(B_{n-1}) \leq h(A_{n-1}) + h(A_n)$ であることがわかるので，これより先の不等式と合わせて $h(A) \leq \sum_{i=1}^n h(A_i)$ を得る．以上で (6.1) が示され，(CM2) が示せた．

演習 3.3 により $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であることに注意すると，以上から講義中の定理 1.4.3 により $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上の測度 μ_0 で $\mu_0|_{\mathcal{R}} = h$ となるものが唯一つ存在する．$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_0)$ の完備化（Lebesgue 拡大）を $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ とすればこの μ が題意の性質を満たす測度である．μ の一意性は，定理 1.4.3 よりその $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ への制限が必ず μ_0 になることと系 1.3.5 からわかる．

解答 6.3. 次の距離の公理を確かめればよい。(1) $d(a,b) \geq 0$. また $d(a,b) = 0 \Rightarrow a = b$. (2) 任意の $a, b \in \Sigma$ に対して $d(a,b) = d(b,a)$. (3) 任意の $a, b, c \in \Sigma$ に対して $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$.

これらは d の定義からすぐに示せる。

無限直積の位相と同じ位相であること

$\{0,1\}$ に対して距離を $d_0(x,y) = |x-y|$, $x, y \in \{0,1\}$ と定義すると、この距離から定まる $\{0,1\}$ 上の位相と離散位相は一致する。$x \in \{0,1\}$ に対して $B_0(x,\epsilon) = \{y \in \{0,1\}; d_0(x,y) < \epsilon\}$, $a \in \Sigma$ に対して $B(a,\epsilon) = \{b \in \Sigma; d(a,b) < \epsilon\}$ と定義する。このとき Σ 上の直積位相 $\mathcal{O}$ に対して、その基本近傍系は

$$B_0(a_1,\epsilon_1) \times \cdots \times B_0(a_k,\epsilon_k) \times \{0,1\}^{\mathbb{N}\setminus\{1,\cdots,k\}}$$

と書ける。$\epsilon = \min\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k\}$ とすると、

$$B(a,\epsilon/2^k) \subset B_0(a_1,\epsilon_1) \times \cdots \times B_0(a_k,\epsilon_k) \times \{0,1\}^{\mathbb{N}\setminus\{1,\cdots,k\}}.$$

これより d から定まる Σ の位相を $\mathcal{O}_d$ とすると $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_d$. また $\epsilon > 0$ に対して, $\sum_{i=k+1}^\infty 2^i < \epsilon/2$ となるような自然数 k をとる。このとき

$$B_0(a_1,\epsilon/2) \times \cdots \times B_0(a_k,\epsilon/2) \times \{0,1\}^{\mathbb{N}\setminus\{1,\cdots,k\}} \subset B(a,\epsilon)$$

となるので $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{O}$ がわかる。

解答 6.4. $\Sigma := \{i_1 i_2 \cdots | i_n \in \{0,1\},\ n = 1,2,\cdots\}$ とし，Σ 上の Bernoulli 測度を P であらわすことにする．$A_n := \{i_1 i_2 \cdots \in \Sigma | i_n = 0\}$ とすると，A_n は Bernoulli 可測となることに注意しておく．

(1) “いつかは表が出る” という事象を A で表すと，$A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ であり，各 A_n は Bernoulli 可測だから，“いつかは表が出る” という事象も Bernoulli 可測である．

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) = 1 - P(\cap_{n\geq 1} A_n^c) \\ &= 1 - \lim_{N\to\infty} P(\cap_{n=1}^N A_n^c) \\ &= 1 - \lim_{N\to\infty} p_1^N \\ &= 1 \end{aligned}$$

(2) “表が無限回出る” という事象を B であらわすと，

$$B = \bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} A_n$$

であり，右辺がBernoulli 可測であるから，“表が無限回出る” という事象も Bernoulli 可測である．

$$P(B) = \lim_{N\to\infty} P(\bigcup_{n\geq N} A_n)$$

である．ここで，任意に $M \geq N$ をとると，

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{n\geq N} A_n) &= 1 - P(\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n^c) \\ &\geq 1 - P(\bigcap_{n=N}^{M} A_n^c) \\ &= 1 - p_1^{M-N-1} \end{aligned}$$

となるが，$M \geq N$ は任意だったので $M \to \infty$ とすれば，$P(\cup_{n\geq N} A_n) = 1$ をえる．ゆえに $P(B) = 1$.

(3) “n 回目で表，$n+1$ 回目で裏，$n+2$ 回目で表がでる”，“n 回目で表，$n+1$ 回目で裏，$n+2$ 回目で表となる n が無限個ある” という事象をそれぞれ C_n, C であらわす．

$$C_n = A_n \cap A_{n+1}^c \cap A_{n+2}$$

より，C_n は可測．

$$C = \bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} C_n$$

なので，C も可測．

$$P(C) = P(\bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} C_n) = \lim_{N\to\infty} P(\bigcup_{n\geq N} C_n)$$

なので，$P(\bigcup_{n\geq N} C_n) = 1$ を示せば十分であるが，

$$P(\bigcup_{n\geq N} C_n) \geq P(\bigcup_{m=0}^{\infty} C_{N+3m})$$

であり，右辺は (2) と同様にすれば 1 になることがわかるので，結局 $P(C) = 1$ が成り立つ．