解析学 I 演習 7　　　　　担当　木上

演習 7.1. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。X 上の $\mathcal{M}$ に関する単関数 f が μ-有限であるとは、ある $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}, A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{M}$ に関して $f = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}$ で任意の i に対して $\mu(A_i) < +\infty$ であることとする。
(1)　f, g が X 上の $\mathcal{M}$ に関する単関数ならば fg も X 上の $\mathcal{M}$ に関する単関数であることを示せ。
(2)　f, g は X 上の $\mathcal{M}$ に関する単関数であり、f は μ-有限とする。このとき fg も μ-有限であることを示せ。

演習 7.2. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。$f : X \to \mathbb{R}$ が連続ならば f は $\mathcal{B}(X, \mathcal{O})$-可測であることを示せ。

演習 7.3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする。f が次の各の条件を満たすとき f は Lebesgue-可測（$\mathcal{L}_1$-可測）であることを示せ。
(1)　f が単調非減少のとき。
(2)　f が高々可算個の点を除いて連続のとき

演習 7.4. X を集合、$\mathcal{M}$ を X の σ-加法族、$n \geq 1$ で $f_n : X \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{M}$-可測とする。このとき

$$\{x | x \in X, \text{ある } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } n \to \infty \text{ で } f_n(x) \to a\}$$

は $\mathcal{M}$ に属することを示せ。