解析学 I 演習 7 解答

解答 7.1.
(1)　$f=\sum_{i=1}^m a_i\chi_{A_i},\ a_i\in\mathbb{R},\ A_i\in\mathcal{M}$ および $g=\sum_{j=1}^n b_j\chi_{B_j},\ b_j\in\mathbb{R},\ B_j\in\mathcal{M}$ とおく．このとき

$$\begin{aligned} fg &= \left(\sum_{i=1}^m a_i\chi_{A_i}\right)\cdot\sum_{j=1}^n b_j\chi_{B_j} \\ &= \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_ib_j\chi_{A_i\cap B_j} \end{aligned}$$

である．全ての (i,j) に対して $A_i\cap B_j\in\mathcal{M}$ だから fg は単函数.
(2)　さらに，f が μ-有限であれば $\mu(A_i)<\infty,\ 1\le\forall i\le m$ ゆえ，$\mu(A_i\cap B_j)\le\mu(A_i)<\infty$ が成り立ち，fg も μ-有限.

解答 7.2.　いま $f^{-1}(\{\infty\})=f^{-1}(\{-\infty\})=\emptyset$ であるから，

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})\subseteq\mathcal{N}:=\{A\mid A\subseteq\mathbb{R},f^{-1}(A)\in\mathcal{B}(X,\mathcal{O})\}$$

を示せばよい．f の連続性により，$\mathbb{R}$ の任意の開集合 A に対して $f^{-1}(A)\in\mathcal{O}$, よって $f^{-1}(A)\in\mathcal{B}(X,\mathcal{O})$, すなわち $A\in\mathcal{N}$ が成り立つ．演習 5.1(1) により $\mathcal{N}$ は σ-加法族であるから，$\mathcal{B}(\mathbb{R})\subseteq\mathcal{N}$ となり，f は $\mathcal{B}(X,\mathcal{O})$-可測である．

解答 7.3.　問題の要求は「Lebesgue 可測（$\mathcal{L}_1$-可測）であることを示せ」だが，実際には本問の仮定を満たす関数は **Borel 可測（$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測）**になっている．そこで以下の解答例では Borel 可測性を示す.（$\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{L}_1$ だから，Borel 可測性は Lebesgue 可測性より強い性質である.）
(1)　f は単調非減少であるから，任意の実数 a に対して $b:=\inf\{x|\,a<f(x)\}$ とおけば,

$$f^{-1}((a,\infty])=(b,\infty]\ \text{または}\ [b,\infty]$$

となり，どちらにしても $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に属する．よって f は Borel 可測.
(2)　f の不連続点を D とすれば，これは高々可算なので $D\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$.（さらに D の任意の部分集合も $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に属する．）よって $C:=\mathbb{R}\setminus D\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ であり，$f|_C:C\to\mathbb{R}$ は連続である（C は $\mathbb{R}$ からの相対位相で位相空間とみる）ので，ある $\mathbb{R}$ の開集合 U_a が存在して $f^{-1}((a,\infty))=C\cap U_a\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. よって $\mathbb{R}$ 全体では

$$f^{-1}((a,\infty))=(C\cap U_a)\cup\{x|x\in D,f(x)>a\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

ゆえに f は Borel 可測.

注意. • (1) において,「単調非減少関数は有界区間上では Riemann 可積分だから，有界区間への制限は Lebesgue 可測，よって全体でも Lebesgue 可測」という議論をしようとしている者が少数

いた．間違いではないのだが，Riemann 可積分関数は Borel 可測とは限らないので，この議論では Lebesgue 可測であることしか言えない．したがって本問の解答してはあまり好ましくない．

• (2) において，f の不連続点の全体 D やその像 $f(D)$ が集積点を持つか持たないかといったことを元にして議論をしようと試みている者が少数いたが，D や $f(D)$ は「位相的には非常に大きい」集合になっていることがあり得るため，そのような解答は望み薄である．実際，D や $f(D)$ は次に示すように $\mathbb{R}$ で稠密になることすらあり得る：

有理数の全体 $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と数列の形に並べ，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次で定める：

$$f(x) := \begin{cases} x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ a_n + 1/n & x = a_n. \end{cases}$$

このとき f の不連続点の全体は $\mathbb{Q}$ に一致し，かつ $f(\mathbb{Q})$ は $\mathbb{R}$ で稠密であることが容易にわかる．

解答 7.4. $A = \{x \mid x \in X, \text{ある } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } n \to \infty \text{ で } f_n(x) \to a\}$ とおく．$x \in A$ となるための必要十分条件は数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることである．よって A は

$$A = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{p\geq 1} \bigcap_{q\geq p} \{x \mid x \in X, |f_p(x) - f_q(x)| < 1/n\}$$

と表される．いま f_p $(p \in \mathbb{N})$ は可測函数であるから，$f_p - f_q$ $(p, q \in \mathbb{N})$ は可測函数であり，従って $\{x \mid x \in X, |f_p(x) - f_q(x)| < 1/n\} \in \mathcal{M}$ $(n, p, q \in \mathbb{N})$ が成り立つ．ゆえに $A \in \mathcal{M}$ である．

注意. • 題意の集合は

$$\{x \in X \mid \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{は } \mathbb{R} \text{ において収束する }\}$$

であるが，これを $a \in \mathbb{R}$ が固定されたものとして

$$\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = a\}$$

と誤解している者がかなりの数いたようである（題意の集合において極限値 $a \in \mathbb{R}$ は x ごとに異なっていても構わない）．基本的なことであるが，**問題文はよく読み，題意を誤解することのないよう注意を払う**よう心掛けてほしい．

• 題意の集合は

$$\{x \in X \mid \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\} \tag{7.1}$$

と書くことができるので，$\liminf_{n\to\infty} f_n, \limsup_{n\to\infty} f_n$ の $\mathcal{M}$-可測性を用いて (7.1) を示すこともできる．ただしこのとき $\liminf_{n\to\infty} f_n, \limsup_{n\to\infty} f_n$ が $\pm\infty$ になることがあるので，無条件に $\limsup_{n\to\infty} f_n - \liminf_{n\to\infty} f_n$ を考えたりすることはできないことに注意してほしい．