解析学 I 演習 8　　　　　　　　担当　木上

演習 8.1. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$A, B \in \mathcal{M}$、$f : X \to \mathbb{R}^*$ は $\mathcal{M}$ 可測とする。
(1)　$B \subseteq A$ とする。f が A 上可積分ならば f は B 上可積分であることを示せ。
(2)　f が A, B 上で可積分ならば $A \cup B$ 上で可積分であることを示せ。

演習 8.2. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$f, g : X \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{M}$-可測とする。
(1)　f, g が共に非負であり、任意の $x \in X$ で $g(x) \leq f(x)$ ならば

$$\int_X g d\mu \leq \int_X f d\mu$$

が成立することを示せ。
(2)　f は X 上可積分であり、μ-a.e. $x \in X$ で $|g(x)| \leq f(x)$ が成り立つならば、g も X 上可積分であることを示せ。

演習 8.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$f : X \to \mathbb{R}^*$ は $\mathcal{M}$-可測、$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ であり任意の n に対して $A_n \subseteq A_{n+1}$ とする。このとき $A = \cup_{n \geq 1} A_n$ とおく。f が A 上可積分ならば

$$\int_A f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{A_n} f d\mu$$

が成り立つことを示せ。

演習 8.4. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$f : X \to \mathbb{R}^*$ は $\mathcal{M}$-可測、$B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{M}$ であり $i \neq j$ ならば $B_i \cap B_j = \emptyset$ とする。$B = \cup_{n \geq 1} B_n$ とおく。いま f が B 上可積分ならば

$$\int_B f d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{B_n} f d\mu$$

を示せ。

演習 8.5. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$A \in \mathcal{M}$, $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ は $\mathcal{M}$-可測とする。いま μ-a.e. $x \in A$ で $f(x) = g(x)$ とする。f が A 上可積分ならば g も A 上可積分であり、$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ が成り立つことを示せ。