解析学 I 演習 8 解答

解答 8.1.
(1) $B \subset A$ より $A = B \sqcup (A \setminus B)$．$\forall x$ に対して $\chi_B(x) \leq \chi_B(x) + \chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x)$ であるから，演習 8.2 (1) より

$$\int_X |f|\chi_B d\mu \leq \int_X |f|\chi_A d\mu < \infty$$

が成り立つ．ゆえに f は B 上可積分.
(2) $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$ である．(1) より右辺の各集合上で f は可積分であるから

$$\int_{A\cup B} |f| d\mu = \int_{A\setminus B} |f| d\mu + \int_{A\cap B} |f| d\mu + \int_{B\setminus A} |f| d\mu < \infty$$

が成り立つ．ゆえに f は $A \cup B$ 上可積分.

注意. (1) において，何の断りもなく「$|f|\chi_B \leq |f|\chi_A$ だから $\int_X |f|\chi_B d\mu \leq \int_X |f|\chi_A d\mu$」と論じている答案が散見されたが，この議論は暗に演習 8.2 (1) の結果を用いていることに注意してほしい（もちろん，今後は演習 8.1，演習 8.2 のような基本的な結果は断りなく使用して構わないが）.

解答 8.2. まず，本問の結論は f, g が $[-\infty, \infty]$ 値であっても成り立つことを注意しておく．以下 f, g は $[-\infty, \infty]$ 値であるとして解答例を示す.
(1) $g(x) \leq f(x)$ より $\{h$ は X 上の単函数で $0 \leq h(x) \leq g(x)\} \subset \{h'$は X 上の単函数で $0 \leq h'(x) \leq f(x)\}$．よって

$$\begin{aligned}\int_X g d\mu &= \sup\left\{\int_X h\, d\mu \,\middle|\, h \text{ は単関数で } 0 \leq h(x) \leq g(x)\right\} \\ &\leq \sup\left\{\int_X h'\, d\mu \,\middle|\, h' \text{は単関数で } 0 \leq h'(x) \leq f(x)\right\} = \int_X f d\mu.\end{aligned}$$

(これより，可測集合 A 上で $0 \leq g \leq f$ ならば $\int_A g d\mu \leq \int_A f d\mu$ が成り立つ．$\because 0 \leq g\chi_A \leq f\chi_A$.)
(2) $N := \{x \mid |g(x)| > f(x)\}$ とおけば，これは可測で $\mu(N) = 0$ であるから，$\int_N |g| d\mu = \int_N f d\mu = 0$ である．また (1) より $\int_{X\setminus N} |g| d\mu \leq \int_{X\setminus N} f d\mu$．従って

$$\int_X |g| d\mu = \int_{X\setminus N} |g| d\mu + \int_N |g| d\mu = \int_{X\setminus N} |g| d\mu + \int_N f d\mu \leq \int_{X\setminus N} f d\mu + \int_N f d\mu = \int_X f d\mu < \infty$$

が成り立つ．ゆえに g は可積分.

注意. (1) において次のような解答をしている者が数人いた：

$f - g \geq 0$ であり $f = g + (f - g)$ だから命題2.2.9により $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu + \int_X (f-g) d\mu \geq \int_X g d\mu$.

一見何の問題もないように思えるが，実は次のような理由からこの解答は極めて好ましくない.

(i) この議論では非負値関数の積分の加法性（命題2.2.9）を用いており，また命題2.2.9は単調収束定理（定理2.2.7）を使って証明されている．ところが実は**単調収束定理の証明中で本問(1)の結論を使っている**（単調収束定理の証明を再検討してみてほしい）ため，**本問(1)の解答に命題2.2.9を使うと循環論法に陥ってしまう**．このため，本問(1)の結論は上記の解答例にように非負値関数の積分の定義から直接に導く必要がある．
(ii) 本問では f, g は $\mathbb{R}$ 値と仮定されているため差 $f-g$ を考えることができるが，f, g が一般の $[-\infty, \infty]$ 値の場合にはそのような議論はできない．本問の結論は **f, g が $[-\infty, \infty]$ 値であっても成り立ってくれなくては困る**ので，f, g が $\mathbb{R}$ 値であることに依存した解答はふさわしくない．

解答 8.3. f が非負値函数のとき，$g = f\chi_A, g_n = f\chi_{A_n}$ とおく．仮定より列 $\{g_n\}$ は $\mathcal{M}$-可測函数の単調非減少列であり，さらに各点 $x \in X$ で g に収束する．よって定理2.2.7により

$$\lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu = \int_X g d\mu \text{ すなわち } \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f d\mu = \int_A f d\mu$$

が成り立つ．

次に A 上の一般の可積分函数 f に対して $f_+ = \max(0, f), f_- = \max(0, -f)$ とおくと，$f_\pm$ は非負値可積分函数であるから

$$\begin{aligned}\int_A f d\mu &= \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f^+ d\mu - \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f^- d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty}(\int_{A_n} f^+ d\mu - \int_{A_n} f^- d\mu) = \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f d\mu\end{aligned}$$

を得る．

解答 8.4. 任意の n に対して $A_n = \cup_{i=1}^n B_n$ とおくと $B = \cup_{n\geq 1} A_n$ であり，かつ任意の n に対して $A_n \subseteq A_{n+1}$ が成り立つ．f は B 上可積分であるから演習8.3により

$$\int_B f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f d\mu$$

が成り立つ．一方 f の可積分性と $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ より

$$\int_{A_n} f d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{B_i} f d\mu$$

であるから結論が従う．

解答 8.5. 仮定より μ-a.e. $x \in A$ で $|g(x)| = |f(x)|$ でありかつ f が A 上可積分であるから，演習8.2 (2) により g も A 上可積分である．$B = \{x \mid x \in A, f(x) \neq g(x)\}$ とおくと，仮定より $\mu(B) = 0$ であるから

$$\int_B f d\mu = 0 = \int_B g d\mu$$

が成り立つ．f と g は A 上可積分かつ任意の $x \in A \setminus B$ で $f(x) = g(x)$ であるから

$$\int_A f d\mu = \int_{A\setminus B} f d\mu + \int_B f d\mu = \int_{A\setminus B} g d\mu + \int_B g d\mu = \int_A g d\mu$$

を得る．