解析学 I 演習 9　　　　　　担当　木上

演習 9.1. 測度空間 $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ を考える。
(1)　任意の $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ は可測であることを示せ。
(2)　$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ が可積分であるための必要十分条件は、$\sum_{i=1}^{+\infty} |f(i)| < +\infty$ であることを示せ。f が可積分ならば $\int_{\mathbb{N}} f d\# = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ を示せ。
(3)　$n, m \in \mathbb{N}$ に対して $a_{n,m} \in \mathbb{R}$ とする。いま、任意の n に対してある $a_n \in \mathbb{R}$ があって $m \to \infty$ で $a_{n,m} \to a_n$ とする。さらに $b_n = \sup_{m \in \mathbb{N}} |a_{n,m}|$ とおけば $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$ である。このとき $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$ であり $m \to \infty$ で

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

が成立することを示せ。

演習 9.2. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$f : X \to \mathbb{R}^*$ は可測とする。
(1)　μ は完備とする。このとき $g : X \to \mathbb{R}^*$ で μ-a.e. $x \in X$ で $f(x) = g(x)$ なら g も可測であることを示せ。
(2)　μ が完備でないときは (1) は一般に成立しないことを示せ。

[ヒント：(1) $A = \{x | x \in X, f(x) \neq g(x)\}$ とおくと、μ-a.e. $x \in X$ で $f(x) = g(x)$ かつ μ は完備なので $A \in \mathcal{M}$. $B = X \backslash A$ とおく。このとき $\{x | f(x) > a\} = \big(\{x | f(x) > a\} \cap A\big) \cap \big(\{x | f(x) > a\} \cap B\big)$.]

演習 9.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$f_n, f : X \to [0, +\infty)$ は可測かつ X 上可積分とする。いま μ-a.e. $x \in X$ で $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ かつ $\lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ が成り立つとき $\lim_{n \to \infty} \int_X |f - f_n| d\mu = 0$ を示せ。

[ヒント：$\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n - f|_{\pm} d\mu = 0$ を示せばよい。$\int_X (f_n - f) d\mu = \int_X (f_n - f)_+ d\mu - \int_X (f_n - f)_- d\mu$ であることに注意。]

演習 9.4. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$f_n, f : X \to [0, \infty)$ は可測とする。いま $n \to \infty$ で f_n が f に確率収束するとは任意の $\epsilon > 0$ に対して $n \to \infty$ で $\mu(\{x | x \in X, |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \to 0$ が成立することである。
(1)　$\mu(X) < +\infty$ とする。μ-a.e. $x \in X$ で $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ ならば $n \to \infty$ で f_n が f に確率収束することを示せ。
(2)　$n \to \infty$ で f_n が f に確率収束するならば $\{f_n\}$ の部分列 g_m で μ-a.e. $x \in X$ で $\lim_{m \to \infty} g_m(x) = f(x)$ となることを示せ。

[ヒント：$A_{n,\epsilon} = \{x | x \in X, |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$ で $\{x | x \in X, \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)\}$ を表現せよ。　(2) では $\mu(A_{n_i, 2^{-i}}) \leq 2^{-i}$ となるような $n_1, n_2, \ldots$ がとれることを示し、Borel-Cantelli を使え。]