解析学 I 演習 9 解答

解答 9.1.

(1)　任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}((a,+\infty)) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, よって f は可測である．

(2)　はじめに $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ に対して $\int_{\mathbb{N}} f d\# = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ を示す．$f_n = \sum_{i=1}^{n} f(i)1_{\{i\}}$ とおくと $\{f_n\}$ は非負値単函数の単調非減少列であり各点で f に収束するから，

$$\int_{\mathbb{N}} f d\# = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n d\# = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(i)\#(\{i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$$

が成り立つ．従って $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ が可積分 ($\int_{\mathbb{N}} |f| d\# < \infty$) であるためには $\sum_{i=1}^{\infty} |f(i)| < \infty$ であることが必要十分である．f を可積分函数であるとする．$f_\pm$ を

$$f_+(i) = \begin{cases} f(i) & (f(i) \geq 0) \\ 0 & (f(i) < 0) \end{cases},\ f_-(i) = \begin{cases} 0 & (f(i) \geq 0) \\ -f(i) & (f(i) < 0) \end{cases},$$

と定義すると，$f_\pm$ は非負値函数で $f = f_+ - f_-$，$\sum_{n=1}^{\infty} f_+(i) < \infty$，$\sum_{n=1}^{\infty} f_-(i) < \infty$ だから

$$\int_{\mathbb{N}} f d\# = \int_{\mathbb{N}} f_+ d\# - \int_{\mathbb{N}} f_- d\# = \sum_{i=1}^{\infty} f_+(i) - \sum_{i=1}^{\infty} f_-(i) = \sum_{i=1}^{\infty} (f_+(i) - f_-(i)) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i).$$

(3)　$f_m, f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ を $f_m(n) = a_{n,m}$, $f(n) = a_n$, $g(n) = b_n$ と定義すると，これらは可測函数である．仮定から任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $|f_m(n)| \leq g(n)$ を成り立ち，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\lim_{m\to\infty} f_m(n) = f(n)$ が成り立つ．さらに $\int_{\mathbb{N}} g d\# = \sum_{i=1}^{\infty} b_n < \infty$, すなわち g は可積分である．よって Lebesgue の収束定理により f は可積分であり，$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{N}} f_m d\# = \int_{\mathbb{N}} f d\#$ が成り立つ．すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ であり，$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が成り立つ．

注意. 上記 (3) の解答例のように f_m, f, g に対して Lebesgue の収束定理を適用する際，$|f_m| \leq g$ となる可積分関数 g として **m に依存しないものをとらなくてはならない**ことに注意しよう．この点が Lebesgue の収束定理の主張の核心である．Lebesgue の収束定理は測度論では非常に基本的な汎用定理なので，正しく使いこなせるようによく復習しておいてほしい．

解答 9.2.

(1)　仮定より，$\mu(N) = 0$ かつ $x \in N^C \Rightarrow f(x) = g(x)$ となる可測集合 N が存在する．このとき任意の実数 a に対して，

$$\begin{aligned} g^{-1}((a,\infty]) &= \left(g^{-1}((a,\infty]) \cap N^C\right) \cup \left(g^{-1}((a,\infty]) \cap N\right) \\ &= \left(f^{-1}((a,\infty]) \cap N^C\right) \cup \left(g^{-1}((a,\infty]) \cap N\right) \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで第 1 項は f の可測性から可測集合であり，第 2 項は零集合の部分集合であるから完備性より可測．ゆえに g は可測函数である．

注意.「$B := \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ とおくと $\mu(B) = 0$ だから...」と論じているものが散見された．しかし今，**g は $\mathcal{M}$-可測とは仮定されておらず，したがって $B \in \mathcal{M}$ かどうかは B の定義から直ちにわかることではない**ため，この記述は適切ではない．

このBを用いて議論したいなら，$B \in \mathcal{M}$であることを次のような議論で示す必要がある：「μ-a.e.」の定義から$N \in \mathcal{M}$で$B \subset N$かつ$\mu(N) = 0$を満たすものが取れる．したがってμの完備性から$B \in \mathcal{M}$.

このように，gの可測性が仮定されていない本問の状況では**$B \in \mathcal{M}$はμの完備性があって初めてわかること**である．実際には解答例のように$B \subset N$，$\mu(N) = 0$となる$N \in \mathcal{M}$を用いて議論することで，$B \in \mathcal{M}$かどうかを論じずに済ますことができる．

(2)　反例を挙げる．$X = \{0, 1, 2\}$とし，$A = \{0\}$とおく．$\mathcal{M} = \{\emptyset, A, A^C, X\}$は$\sigma$-加法族であり，測度$\mu$を$\mu(A) = \mu(X) = 1$で定義する．このとき，$\chi_{\{0,1\}}$は可測函数$\chi_A$にほとんど至るところ一致するが，明らかに非可測である．

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$の場合の反例（余裕のある方だけ読んで下さい）

あるBorel零集合Nに対して$A \subset N$となるようなBorel非可測集合Aを構成する．（χ_Aが反例．）そのために次の函数を用意する．まず$x \in (0, 1)$を2進小数展開，つまり$x = 0.a_1a_2...a_n...$，$(a_n = 0 \text{ or } 1)$とする．（但し有限小数表示$0.a_1...a_n$が可能なものは無限小数表示$0.a_1...a_{n-1}0111...$する．）そして函数φを$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n/3^n$で定義する．$\varphi$は単調増加であり，Lebesgue可測．また$\varphi((0, 1))$はCantor集合に含まれることに注意する．

$L \subset (0, 1)$となるLebesgue非可測集合に対して$A = \varphi(L)$を考えれば，AはBorel非可測である．なぜなら，AがBorel可測ならば$\varphi^{-1}(A) = L(\because \varphi$は単射$)$はLebesgue可測になる必要があるが，それは$L$の取り方に矛盾する．$A$はCantor集合に含まれ，Cantor集合は測度0のBorel集合なので，目的の集合が得られたことになる．（AはBorel非可測なLebesgue可測集合の例になっている．Lの構成は，伊藤清三著“ルベーグ積分入門” などを参照．）

解答 9.3.　仮定よりμ-a.e.$x \in X$で$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$であるから，$\lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f(x))_- = 0$ μ-a.e. $x \in X$．また，f_n, fが非負であることに注意すれば，$(f_n - f)_- \le f$である．従って，Lebesgueの収束定理より$\lim_{n\to\infty} \int_X (f_n - f)_- \, d\mu = 0$が成り立つ．また，

$$\int_X (f_n - f)_+ \, d\mu = \int_X (f_n - f) \, d\mu + \int_X (f_n - f)_- \, d\mu$$

であり，仮定により(右辺第1項)$\to 0$ $(n \to \infty)$が成り立つので，先に示したこととあわせて$\lim_{n\to\infty} \int_X (f_n - f)_+ \, d\mu = 0$を得る．以上をあわせて，結論を得る．

解答 9.4.　$A_{n,\epsilon} := \{x \in X \,|\, |f_n(x) - f(x)| \ge \epsilon\}$とおく．

(1)　$C := \{x \in X \,|\, \lim_{\ell\to\infty} f_n(x) = f(x)\}^c$とおき，任意に$\epsilon > 0$を固定する．$\cap_{n\ge1} \cup_{m\ge n} A_{m,\epsilon} \subset C$であるから，$\mu(X) < \infty$と$\mu(C) = 0$の仮定より$0 = \mu(\cap_{n\ge1} \cup_{m\ge n} A_{m,\epsilon}) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{m\ge n} A_{m,\epsilon})$.
$A_{n,\epsilon} \subset \cup_{m\ge n} A_{m,\epsilon}$より$0 \le \mu(A_{n,\epsilon}) \le \mu(\cup_{m\ge n} A_{m,\epsilon})$だから，$n \to \infty$として$\lim_{n\to\infty} \mu(A_{n,\epsilon}) = 0$.

（別解）μ-a.e. $x \in X$に対し$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$であるから，特に$\lim_{n\to\infty} \chi_{A_{n,\epsilon}} = 0$ μ-a.e.である．各$n \ge 1$に対し$0 \le \chi_{A_{n,\epsilon}} \le 1$であり，$\int_X 1 d\mu = \mu(X) < \infty$であるからLebesgueの収束定理により$\mu(A_{n,\epsilon}) = \int_X \chi_{A_{n,\epsilon}} d\mu$は$n \to \infty$のとき0に収束する．これが示すべきことであった．

(2)　f_nがfに確率収束するので，任意の$\delta, \epsilon > 0$に対し，$N = N(\delta, \epsilon) \in \mathbb{N}$が存在して，$n \ge N$ならば$\mu(A_{n,\epsilon}) < \delta$となる．$\{n_i\}_{i\ge0}$を$n_0 := N(1, 1)$，$n_i := \max\{n_{i-1} + 1, N(2^{-i}, 2^{-i})\}$で帰納的に定義すれば，任意の$i$に対して$\mu(A_{n_i,2^{-i}}) < 2^{-i}$なので$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_{n_i,2^{-i}}) \le 1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} < \infty$．したがって，Borel-Cantelliの補題により$\mu(\cap_{i\ge0} \cup_{j\ge i} A_{n_j,2^{-j}}) = 0$. $\{x \in X \,|\, \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x) = f(x)\}^c \subset \cap_{i\ge0} \cup_{j\ge i} A_{n_j,2^{-j}}$より，結論を得る．