解析学 II 演習 4 解答

解答 4.1.

(1)　内積 $(f, \varphi_n), n \in \mathbb{Z}$ を計算する．$n = 0$ に対して

$$(f, \varphi_0) = \int_0^{2\pi} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \pi\sqrt{2\pi}.$$

$n \neq 0$ に対しては部分積分により

$$(f, \varphi_n) = \int_0^{2\pi} x \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{i\sqrt{2\pi}}{n}.$$

よって f の Fourier 級数展開は

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (f, \varphi_n)\varphi_n(x) = \pi + \sum_{n\neq 0} \frac{i}{n} e^{inx}.$$

(2)　$n \neq 0$ に対して

$$(f, \varphi_n) = \int_0^{\pi} (-1) \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-in\pi} - 1}{in}.$$

$(f, \varphi_0) = 0$ であるから，これらをまとめて

$$(f, \varphi_n) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}), \\ \frac{4i}{\sqrt{2\pi} n} & (n \text{ が奇数}). \end{cases}$$

よって f の Fourier 級数展開は

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (f, \varphi_n)\varphi_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2i}{\pi(2n-1)} e^{i(2n-1)x}.$$

解答 4.2.

(1)　f と φ_n の 2π 周期性を用いて

$$(T_\theta f, \varphi_n) = \int_0^{2\pi} f(x-\theta) \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_0^{2\pi} f(x) \frac{e^{-in(x+\theta)}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

よって $(T_\theta f, \varphi_n) = e^{-in\theta}(f, \varphi_n)$ が成り立つ.

(2)　変数変換 $x \to -x$ により

$$(Rf, \varphi_n) = \int_0^{2\pi} f(-x) \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_0^{2\pi} f(x) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

よって $(Rf, \varphi_n) = (f, \varphi_{-n})$ が成り立つ.

解答 4.3.

(1) まず，$f*g$ が 2π 周期になることは明らか．Hölder の不等式より

$$|f*g(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}|f(x-y)g(y)|dy \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_2\|g\|_2.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\|f*g\|_2^2 &\le \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2\|g\|_2^2\,dx\\ &= \|f\|_2^2\|g\|_2^2.\end{aligned}$$

(2) 次の計算から，$c_n = a_nb_n$ となることがわかる．

$$\begin{aligned}c_n &= \int_0^{2\pi}(f*g)(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(x-y)g(y)\,dy\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-inx}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x-y)g(y)e^{-inx}\,dx\,dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(y)e^{-iny}\left(\int_0^{2\pi}f(x-y)e^{-in(x-y)}\,dy\right)\,dx\\ &= a_nb_n.\end{aligned}$$

補足 ($f*g$ の可測性): この問題において，convolution

$$f*g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(x-y)g(y)\,dy$$

が $L^2(S^1)$ の元として定義できるためには，まず可測になることが必要である．そのために $f(x-y)g(y)$ が $S^1\times S^1$ 上の Lebesgue 可測函数であることを確認する必要があるが，それには次のことに注意すればよい．

- $\Psi(x,y) := x-y$ とおくとき，$\Psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_1$-可測．ただし，$\mathcal{L}_d$ は d 次元 Lebesgue 可測集合全体．

($\because$) まず，Ψ は連続函数なので，Borel 可測であることに注意する．次に，以下を示そう．

$$N\in\mathcal{B}_1, m_1(N)=0 \Longrightarrow m_2(\Psi^{-1}(N))=0. \tag{N}$$

(ただし，m_d は d 次元 Lebesgue 測度，$\mathcal{B}_d$ は d 次元 Borel 可測集合全体である．) 実際，

$$\begin{aligned}m_2(\Psi^{-1}(N)) &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}1_{\Psi^{-1}(N)}(x,y)\,dx\right)dy && \text{(Fubini の定理)}\\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}1_{N+y}(x)\,dx\right)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}1_{N}(x)\,dx\right)dy && \text{(Lebesgue 測度の平行移動不変性)}\\ &= 0 && (m_1(N)=0 \text{ より})\end{aligned}$$

なので，(N) が示された．

そこで $X \subset \mathbb{R}$ を Lebesgue 可測集合とすれば，Borel 可測集合 $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$ が存在して次をみたす．

$$B_1 \subset X \subset B_2, \quad m_1(B_2 \setminus B_1) = 0.$$

いま，Ψ が Borel 可測函数なので $\Psi^{-1}(B_1), \Psi^{-1}(B_2)$ は Borel 可測であり，また，(N) により，

$$\Psi^{-1}(B_1) \subset \Psi^{-1}(X) \subset \Psi^{-1}(B_2), \quad m_2(\Psi^{-1}(B_2) \setminus \Psi^{-1}(B_1)) = 0$$

が成り立つ．したがって，$\Psi^{-1}(X)$ は Lebesgue 可測．

解答 4.4. (1),(2) 修正: "$f \in C^\infty(S^1)$" $\Longrightarrow$ "$f \in C^\infty(S^1),\ f \neq 0$"

(1) 部分積分によって $(\triangle f, f) = -(f', f')$ となることがわかる．また，仮定より $(\triangle f, f) = -\lambda(f, f)$ ゆえ，$\lambda(f, f) = (f', f')$ である．$f \neq 0$ より $(f, f) > 0, (f', f') \geq 0$ なので，$\lambda \in [0, \infty)$ が成り立つ．(もちろん，$f \in C^\infty(S^1)$ より $(f', f') < \infty$ である．)

(2) $\triangle$ は線型作用素であり，$\triangle\varphi_n = -n^2\varphi_n$ が成り立つので十分性は明らか．そこで必要性を示す．

(1) より $\lambda \geq 0$ なので，微分方程式 $\triangle f = -\lambda f$ の一般解は

$$f(x) = ae^{i\sqrt{\lambda}x} + be^{-i\sqrt{\lambda}x}$$

と書ける．これが周期境界条件，すなわち $f(2\pi) = f(0)$ をみたしているので，

$$f(2\pi) = ae^{i\sqrt{\lambda}2\pi} + be^{-i\sqrt{\lambda}2\pi} = a + b$$

が成り立つ．今 $f \neq 0$ を考えており，$(a, b) \neq (0, 0)$ であるから $\lambda = n^2$ が従う．ゆえに (係数を変更すれば)

$$f(x) = a'\varphi_n + b'\varphi_{-n}$$

となるので，題意が示された．

(3) S^1 は測度有限なので $L^2(S^1) \subseteq L^1(S^1)$ となり，$u_0 \in L^1(S^1)$ である．従って u_0 の Fourier 係数は一様に有界，すなわち

$$|(u_0, \varphi_n)| \leq \int_0^{2\pi} |u_0(x)\varphi_n(x)|dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|u_0\|_1, \quad (\forall n)$$

が成り立つ．表記を簡単にするために $f_n(x, t) := e^{-n^2t}\varphi_n(x)$ とおく．つまり $u(x, t) = \sum_n (u_0, \varphi_n) f_n(x, t)$ とする．f_n の導関数を計算すると

$$\partial_{l,m} f_n := \frac{\partial^{l+m} f_n}{\partial x^l\, \partial t^m} = (in)^l \cdot (-n^2)^m \cdot e^{-n^2t}\varphi_n(x), \qquad l, m \geq 0$$

となる．これにより，任意に $\delta > 0$ を固定するごとに，級数 $\sum_n (u_0, \varphi_n)\partial_{l,m} f_n, (l, m \geq 0)$ は $S^1 \times [\delta, \infty)$ 上一様に絶対収束するので，$u(x, t)$ は $S^1 \times [\delta, \infty)$ 上 C^2 級 (実は C^∞ 級) である．(演習 1.1 も参照せよ．) $\delta > 0$ は任意であったから，$u(x, t)$ は $S^1 \times (0, \infty)$ 上 C^2 級である．さらにこのとき $u(x, t)$ は項別微分可能であり，各 $f_n(x, t)$ は問題の微分方程式をみたすから，$u(x, t)$ も方程式をみたす．

最後に初期値への収束を示そう．まず，$\{\varphi_n\}$ は $L^2(S^1)$ の完全正規直交系なので L^2 の意味で $u_0 = \sum_n (u_0, \varphi_n)\varphi_n$ が成り立つ．さらに，Parséval の等式から $\sum_n |(u_0, \varphi_n)|^2 = \|u_0\|_2^2 < \infty$ が成り立っており，これから $\|u_t\|_2^2 = \sum_n |(u_0, \varphi_n)|^2 e^{-2n^2t} < \infty$，すなわち $u_t \in L^2(S^1)$, $(\forall t \geq 0)$ が従う．そこで再び Parséval の等式を使えば，

$$\|u_0 - u_t\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |(u_0, \varphi_n)|^2 (1 - e^{-n^2t})^2 \to 0 \quad \text{as } t \downarrow 0$$

となる．(最後の部分で，$|(u_0, \varphi_n)|^2 (1 - e^{-n^2t})^2 \leq |(u_0, \varphi_n)|^2$ と Lebesgue の収束定理を使った．)