Part II

Fourier 解析と超関数

フーリエ解析とは

Bach は 1722 年、1744 年にそれぞれ「平均律グラヴィーア曲集第１巻、第２巻」(ドイツ語：Das Wohltemperirte Clavier, 英語：Well-tempered clavier）を完成させた。平均律とは１オクターブ（オクターブ＝周波数は異なるが同じ音）を１２に均等に分けるという意味である。（“Wohltemperirte” は厳密には「平均律」を必ずしも意味しないという指摘もある。）このように、18 世紀は近代西洋音楽の出発点であり、（直接の因果関係は不明であるが）楽器の音＝振動に対する数学的なアプローチも時期を同じくして進展することになった。

数学的には、この問題は両端を固定した弦の振動と定式化することができる。簡単のために弦を区間 $[0, 1]$ と見なす。このとき弦の振動は位置 $x \in [0, 1]$ と時間 $t \geq 0$ の関数 $u(x, t)$ で表され、両端が固定されているという条件から、$u(0, t) = u(1, t) = 0$ が任意の $t \geq 0$ について成り立っている。弦の振動の特別な場合とし、整数 k に対して、

$$\sin k\pi x \cos ck\pi t \tag{II.1}$$

（ただし c は弦の物理的性質を表す定数である）があることは 18 世紀の前半までに、Taylor（Taylor 展開の Taylor)、Johann Bernoulli らによって発見されていた。この時点では、弦の振動が波動方程式に従うことはまだ知られていない。(II.1) は倍音（harmonics) と呼ばれている。1733 年 Daniell Bernoulli（Johann Bernoulli の子供）は弦の振動を表す式として (II.1) とその重ね合わせについて考察した。

その後 1747 年に D’Alembert は弦の振動が（今日波動方程式と呼ばれる）次の方程式 (II.2) を満たすことを発見した。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{II.2}$$

さらに彼は弦の方程式 (II.2) の解は、$u(x, 0) = f(x)$ とおくと、

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} \tag{II.3}$$

と書けることを発見した。ここで f は $[0, 1]$ 上に定義されたもともとの f を奇関数として $[-1, 1]$ に拡張し、それをさらに $\mathbb{R}$ 上に周期 2 の周期関数として拡張したものである。

1748 年 Euler は弦の振動は (II.3) で表されると主張した。ただし D’Alembert とは違い「弦の振動は (II.2) をみたす」とは言っていない。 なぜなら時間 0

での形状 f が微分可能でない点を持つ場合、(II.3) は微分可能ではない点を持ち、(II.2) が意味を成さないからである。実際、ハープシコードなどをつま弾くとき f は区分線形の形を持ち微分可能でない点が存在すると考えるのが自然なように思われる。現代の解析学の観点からは、このような微分不可能な "解" も超関数の意味では (II.2) を満たす。しかしこのような視点は、２０世紀にはいり Fourier 変換および超関数の理論が出現するまでは正当化されない。

このように、現代的な視点からは D'Alembert と Euler の主張に矛盾はないのであるが、未だ "関数" という概念自体が明確となっていない１８世紀においては２人の違いは決定的なものであった。以後、この問題は D'Alembert と Euler との間の深刻な対立へと発展した。

一方、Daniel Bernoulli は 1753 年、弦の振動は常に倍音 (II.1) の重ね合わせで表現されると主張した。つまり、弦の振動は常に

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos ck\pi t \sin k\pi x \tag{II.4}$$

という形で表され、a_k は時間 0 での形状 $f(x) = u(x,0)$ から

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\pi x \tag{II.5}$$

で決まるというのである。(II.5) はまさに今日 Fourier 級数として知られている関数の表現である。しかしながら、D. Bernoulli は

- $[0,1]$ 上の "すべての" 関数が (II.5) のように書ける。

を示すことは出来なかったし、

- f からどのように a_k が決まるのか。

については何も言えなかった。

弦の振動についての三者三様の考察はこの後５０年以上に及ぶ論争へと発展する。この問題の最終的な決着は、19 世紀に入り Fourier, Dirichlet が登場するのを待たなくてはならない。

1807 年 Joseph Fourier は熱伝導を表す方程式を導きさらにその一般解の形を与えた論文をフランス科学アカデミーに提出した。$[0,1]$ 区間を熱を伝える媒質のモデルと考えるとき、彼の論文の主な主張は、次の (1), (2), (3)

である。
(1) 熱の伝導は、位置 $x \in [0,1]$、時間 $t \geq 0$ での温度を $u(x,t)$ とおくと、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{II.6}$$

で表される。ここで c は媒質の熱の伝えやすさ（熱伝導率）を表す物理的な定数である。
(2) “すべての関数” は (II.5) の形で表され a_k は

$$a_k = 2\int_0^1 f(x) \sin k\pi x dx \tag{II.7}$$

で与えられる。
(3) 両端を 0 度に固定したときの (II.6) の解は $f(x) = u(x,0)$ とおき、f が (II.5) で表されるとするとき、

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-c^2k^2\pi^2 t} \sin k\pi x \tag{II.8}$$

で与えられる。

この論文は、Laplace, Lagrange, Monge, Lacroix などが referee となり審査されたが、(II.5) の収束の数学的厳密性が Laplace と Lagrange により、また熱伝導を表す方程式としての (II.6) の正当性が Biot, Laplace, Poisson などにより問題とされすぐには受理されなかった。Fourier の論文は修正を加えた上で、最終的には 1822 年にフランス科学アカデミーより出版されているが、この時点でも (II.5) の収束について数学的に厳密な証明は得られていない。(II.5) の収束については、1829 年の Dirichlet の論文において初めて、有限個の極大と極小、有限個の不連続点をもつような関数の場合に厳密な証明が得られている。

(II.7) を導くには、

$$\int_0^1 \sin m\pi x \sin n\pi x dx = \frac{\delta_{m,n}}{2}, \tag{II.9}$$

（ただし $\delta_{m,n}$ は $m = n$ なら 1、$m \neq n$ なら 0）を用いればよい。例えば、$f(x) = 1$ とするとき、

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m\pi} \sin 2m\pi x. \tag{II.10}$$

この式は $x = 0, 1$ では明らかに成立しないことに注目。

今日では (II.5) と (II.7) を合わせたものを、f の Fourier sin series（フーリエの正弦級数）という。

現代的解釈へ

何故そうするのかはさておいて、

$$
\begin{aligned}
C_D^\infty = \{f \mid & f : [0,1] \to \mathbb{R}, \\
& f \text{ は } [0,1] \text{ 上 } C^\infty \text{ 級, 任意の } n \geq 0 \text{ に対して } f^{(2n)}(0) = f^{(2n)}(1) = 0\}
\end{aligned}
$$

とおく。ただし $f^{(m)}$ は f の m 階の導関数を表す。さらに、$f, g \in C_D^\infty$ に対して、

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

とおく。このとき C_D^∞ はベクトル空間であり、$(\cdot, \cdot)$ はその上の内積である。このとき $f \in C_D^\infty$ に対して $f^{(2)}$ を対応させる線型写像を Δ とおくと、（すべての $n \geq 0$ で $f^{(2n)}(0) = f^{(2n)}(1) = 0$ という仮定により） $\Delta f \in C_D^\infty$ である。すなわち $\Delta : C_D^\infty \to C_D^\infty$ である。ここで、部分積分を行えば、

$$(f, \Delta g) = (\Delta f, g).$$

が成り立つことがわかる。つまり Δ は対称な線型写像である。

さて有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間の対称な線型写像に対しては次の定理が成り立っていた。

定理 II.1. V を有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間、$(\cdot, \cdot)$ を V の内積とする。さらに $A : V \to V$ を対称な線型写像とする。このときある V の正規直交基底 $(e_1, \ldots, e_n)$ と $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ が存在して、

$$Ae_i = \lambda_i e_i$$

となる。すなわち対称な線型写像に対してその固有ベクトルからなる正規直交基底が存在する。特に任意の $x \in V$ に対して

$$x = \sum_{i=1}^n (x, e_i)e_i \tag{II.11}$$

が成り立つ。

いま C_D^∞ は無限次元のベクトル空間であるからこの定理を直接適用することはできない。しかしながら、この定理の "無限次元版" が成り立つと仮定して、まず $\Delta : C_D^\infty \to C_D^\infty$ の固有値と固有関数（固有ベクトル）を求めてみる。

$$\begin{cases} \Delta f &= \lambda f \\ f(0) &= f(1) = 0 \end{cases} \tag{II.12}$$

ここで、$\Delta f = \lambda f$ ならば

$$\lambda(f,f) = (\Delta f, f) = -(f', f')$$

従って、$\lambda \leq 0$ である。これより、常微分方程式 $\Delta f = f$ の解は、

$$A \sin \sqrt{|\lambda|} x + B \cos \sqrt{|\lambda|} x$$

の形になる。$f(0) = 0$ より $B = 0$ であり、$f(1) = 0$ から自然数 k に対して $\lambda = -k^2\pi^2$ と書けることがわかる。A を $(f,f) = 1$ となるように選ぶと、(II.12) の解は、$k = 1, 2, \ldots$ に対して、

$$\lambda_k = -k^2\pi^2 \quad （固有値）$$
$$\varphi_k(x) = 2^{-1/2} \sin k\pi x \quad （固有ベクトル）$$

となることがわかる。このとき (II.9) より $(\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{m,n}$ であり任意の m に対して $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ は正規直交系をなす。さらに、(II.7) で与えられる a_k に対して、$a_k \sin k\pi x = (f, \varphi_k)\varphi_k$. これはすなわち φ_k 方向への正射影である。

「“すべての” 関数が (II.5) の形に表される」という主張はこの立場では、$f_m = \sum_{k=1}^m (f, \varphi_k)\varphi_k$ とするとき、$(f - f_m, f - f_m) \to 0$ as $m \to \infty$ を意味すると解釈できる。このとき、f は必ずしも C_D^∞ に属している必要はない。厳密に言えば f は C_D^∞ の内積 $(\cdot,\cdot)$ から導かれる距離に関する完備化の元となる。

定義 II.2. V を $\mathbb{R}$-ベクトル空間、$(\cdot,\cdot)$ をその内積とする。このとき、$(\psi_k)_{k\geq 1}$ が、$(\psi_m, \psi_n) = \delta_{m,n}$ かつ任意の $x \in V$ に対して $x = \sum_{k=1}^\infty (x, \psi_k)\psi_k$（収束は内積から入る距離に関して）が成り立つとき、$(\psi_k)_{k\geq 1}$ を V の完全正規直交系（complete orthonormal system）という。

定理 II.3. V を $\mathbb{R}$-ベクトル空間、$(\cdot,\cdot)$ をその内積とする。また $(\psi_k)_{k\geq 1}$ は V の完全正規直交系とするとき、V の内積 $(\cdot,\cdot)$ に関する完備化を $\overline{V}$ とすると任意の $x \in \overline{V}$ に対して、

$$x = \sum_{i=1}^\infty (x, \psi_i)\psi_i$$

が成り立つ。

ここでは証明は与えないが、$(\varphi_k)_{k\geq 1}$ は C_D^∞ の完全正規直交系である。
一方、

$$\mathcal{L}^2 = \{f | f : [0,1] \to \mathbb{R}, f^2 \text{ は } [0,1] \text{ 上ルベーグ測度に関して可積分}\}$$

とおくとき、任意の $f \in \mathcal{L}^2$ に対して、ある $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq C_D^\infty$ があって $(f - f_n, f - f_n) \to 0$ as $n \to \infty$. これより任意の $f \in \mathcal{L}^2$ は $f = \sum_{i=1}^\infty (f, \varphi_k)\varphi_k$ と書ける。このとき $f = 1$ とおけば (II.10) である。

Chapter 4

L^p 空間

§4.1 Banach 空間

n 次元の $\mathbb{R}$-vector space $\mathbb{R}^n$ では、 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して “ベクトルの長さ” を $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$ と定義した。次に定義する norm（ノルム）という概念は一般の vector space における “ベクトルの長さ” に相当する。

定義 4.1.1 (Norm)**.** $K = \mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とする。V を K-vector space とする。$N : V \to [0, +\infty)$ が次の (N1), (N2), (N3) の条件をみたすとき、N を V の norm という。
(N1) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(N2) $x, y \in V$ に対して $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.
(N3) $\lambda \in K, x \in V$ に対して $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

vector space V とその norm N の対 (V, N) を normed vector space（ノルム空間）という。

命題 4.1.2. (V, N) を *normed vector space* とする。このとき $x, y \in V$ に対して $d(x, y) = N(x - y)$ と定義すれば d は V 上の距離となる。d を *norm* N に付随する V 上の距離、d から決まる V 上の位相を *norm* N に付随する V 上の位相という。

定義 4.1.3 (Banach space)**.** (V, N) を normed vector space とする。N から誘導される距離 d に関して V が完備であるとき、(V, N) は Banach space であるという。

例 4.1.4. $\mathbb{R}^n$ において、$x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して、

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|$$
$$||x||_2 = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots + (x_n)^2}$$
$$||x||_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

とおく。$||\cdot||_1, ||\cdot||_2, ||\cdot||_\infty$ はいずれも $\mathbb{R}^n$ の norm である。（演習 4.1.3）$||\cdot||_1, ||\cdot||_2, ||\cdot||_\infty$ から導かれる $\mathbb{R}^n$ の距離をそれぞれ d_1, d_2, d_∞ とする。このとき $d_2(x, y) = |x - y|$ は Euclid の距離である。従って $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$ は Banach 空間である。(4.1.2) と命題 4.1.7 より $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1)$, $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ も Banach 空間であることがわかる。

例 4.1.5. $C([0,1]) = \{f | f : [0,1] \to \mathbb{R}, f$ は $[0,1]$ 上連続 $\}$ とする。また $f \in C([0,1])$ に対して、$||f||_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ とおく。このとき、$||\cdot||_\infty$ は $C([0,1])$ 上の norm であり、$(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$ は Banach space である。（証明は演習 4.1.4 を参照のこと）

定義 4.1.6. $(V, N_1), (V, N_2)$ を normed vector space とする。ある定数 $c_1, c_2 > 0$ があって任意の $x \in V$ に対して、

$$c_1 N_2(x) \leq N_1(x) \leq c_2 N_2(x)$$

が成り立つとき norm N_1 と N_2 は同値であるという。

命題 4.1.7. (V, N_1), (V, N_2) を *normed vector space* とする。N_1 と N_2 が同値であるとする。また V 上の N_1, N_2 からそれぞれ定義される距離を d_1, d_2 とする。このとき、
(1) V の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ が d_1 について *Cauchy* 列ならば d_2 についても *Cauchy* 列である。
(2) (V, N_1) が *Banach* 空間ならば (V, N_2) も *Banach* 空間である。

定理 4.1.8. $(V, ||\cdot||_V), (U, ||\cdot||_U)$ をノルム空間とする。線型写像 $f : V \to U$ に対して、次の 3 つの条件は同値である。
(1) f は V 上連続である。
(2) f は 0 で連続である。
(3) f は有界である。すなわちある $c > 0$ があって任意の $v \in V$ に対して $||f(v)||_U \leq c||v||_V$.

注意. vector space V, U に対してその間の線型写像 $f: V \to U$ を考えるときは、特に何も言わなければ V, U はともに $\mathbb{R}$-vector space あるいはともに $\mathbb{C}$-vector space とする。

証明. (1) $\Rightarrow$ (3): $D = \{u | u \in U, ||u||_U < 1\}$ とする。このとき、D は開集合なので $f^{-1}(D)$ も開集合。$0 \in f^{-1}(D)$ より $f^{-1}(D)$ は 0 の近傍である。従ってある $\alpha > 0$ に対して $\{v | v \in V, ||v||_V \leq \alpha\} \subseteq f^{-1}(D)$. とくに $||v||_V = \alpha$ ならば $||f(v)||_U \leq 1$. ここで任意の $v \in V$ で $v \neq 0$ に対して $v_1 = \alpha v/||v||_V$ とおくと $||v_1||_V = \alpha$ なので、

$$1 \geq ||f(v_1)||_U = \frac{\alpha}{||v||_V}||f(v)||_U$$

よって $c = 1/\alpha$ とおけば (3) が成り立つ。
(3) $\Rightarrow$ (2): $v_n \in V$ で $n \to \infty$ で $||v_n||_V \to 0$ とする。このとき $||f(v_n)||_U \leq c||v_n||_V$ より $||f(v_n)||_U \to 0$. 従って f は 0 で連続である。
(2) $\Rightarrow$ (1): $v \in V$ とする。ここで、$v_n \to v$ as $n \to \infty$ とするとき $v_n - v \to 0$ as $n \to \infty$. f は 0 で連続なので $f(v_n - v) = f(v_n) - f(v) \to 0$ as $n \to \infty$. よって f は v で連続である。 □

定理 4.1.9. $(V, ||\cdot||_V)$ をノルム空間, $(U, ||\cdot||_U)$ を *Banach* 空間とする。さらに W を V の稠密な部分空間とする。いま有界線型写像 $f: W \to U$ に対して有界線型写像 $F: V \to U$ で $F|_W = f$ をみたすものがただ一つ存在する。さらに

$$\sup_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{||F(v)||_U}{||v||_V} = \sup_{v \in W\setminus\{0\}} \frac{||f(v)||_U}{||v||_V} \tag{4.1.1}$$

証明. $F: W \to U$ は連続、線型であるので、定理 4.1.8 よりある実数 $C > 0$ があって

$$\sup_{w \in W\setminus\{0\}} \frac{||f(w)||_U}{||w||_V} = C$$

(a) f が V 上に拡張できること: $v \in V$ とする。いま $\{w_n\}_{n\geq 1}$ を W の点列で $n \to \infty$ で v に収束するものとする。このとき、

$$||f(w_n) - f(w_m)||_U = ||f(w_n - w_m)||_U \leq C||w_n - w_m||_V.$$

$\{w_n\}_{n\geq 0}$ は Cachy 列なので $\{f(w_n)\}_{n\geq 1}$ も Cauchy 列である。$(U, ||\cdot||_U)$ は完備なのである $u \in U$ が存在して $n \to \infty$ で $f(w_n) \to u$ となる。この u は w_n のとりかたによらない。すなわち w'_n を v に収束する W の点列とするとき、$w_1, w'_1, w_2, w'_2, \ldots$ と w_n と w'_n を交互に並べた点列を $\{v_n\}_{n\geq 1}$ とおく

と v_n はやはり v に収束する。このときさきほどの議論より $f(v_n)$ はある u_* に収束する。このとき

$$\lim_{n\to\infty} f(w_n) = \lim_{n\to\infty} f(w'_n) = u_*$$

となるので $u_* = u$ が成り立つ。よって u は $\{w_n\}_{n\geq 1}$ の取り方にはよらない。この u を $F(v)$ と定義して $F : V \to U$ を定義する。このとき W 上では F はもとの f と一致する。
(b) 拡張された F が線型であること: いま $x, y \in V$ に対して W_n の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}, \{y_n\}_{n\geq 1}$ をそれぞれ $n \to \infty$ で x, y に収束するものとする。$a, b \in K$ に対して $ax_n + by_n \in W$ で $n \to \infty$ で $ax_n + by_n \to ax + by$ である。従って

$$F(ax+by) = \lim_{n\to\infty} f(ax_n + by_n) = \lim_{n\to\infty} af(x_n) + bf(y_n) = aF(x) + bF(y)$$

つまり F は線型である。
(c) (4.1.1) が成り立つこと: F は f の拡張なので $\sup_{v\in V\setminus\{0\}} ||F(v)||_U/||v||_V \geq \sup_{w\in W\setminus\{0\}} ||f(w)||_U/||w||_V$ は明らか。$v \in V$ に対して $\{w_n\}_{n\geq 1}$ を $n \to \infty$ で $w_n \to v$ となるように選ぶ。このとき $||f(w_n)||_U \leq C||w_n||_V$ である。$n \to \infty$ で $f(w_n)$ は $F(v)$ に収束するので、$||F(v)||_U \leq C||v||_v$. よって、(4.1.1) が成り立つ。 □

演習 4.1.1. 命題 4.1.2 を示せ。

演習 4.1.2. 命題 4.1.7 を示せ。

演習 4.1.3. 例 4.1.4 の $||\cdot||_1, ||\cdot||_2, ||\cdot||_\infty$ はそれぞれ $\mathbb{R}^n$ の norm であることを示せ。さらに、

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty \tag{4.1.2}$$

であることを示せ。

演習 4.1.4. $\{f_n\}_{n\geq 1}$ を $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$ の Cauchy 列とする。
(1)　任意の $x \in [0,1]$, 任意の $n, m \geq 1$ に対して

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq ||f_m - f_n||_\infty \tag{4.1.3}$$

を用いて、$\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ は実数列として Cauchy 列であることを示せ。
(2)　$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ で $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を定義するとき、(4.1.3) から任意の $\epsilon > 0$ に対してある $N \geq 1$ があって、任意の $n \geq N$ で

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

が成り立つことを示せ。
(3) 任意の $n \geq 1$ と任意の $x, y \in [0,1]$ に対して、

$$|f(x) - f(y)| \leq |f_n(x) - f_n(y)| + 2 \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|$$

を示せ。
(4) $f \in C([0,1])$ であり、$\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_\infty = 0$ を示せ。

演習 4.1.5. V を実ベクトル空間、$C \subset V$ は次の (a), (b), (c), (d) の性質をもつとする。
(a) $0 \in C$.
(b) C は convex、すなわち任意の $x, y \in C$ および任意の $t \in [0,1]$ に対して $tx + (1-t)y \in C$.
(c) 任意の $x \in V$ に対してある $s_1, s_2 > 0$ があって $s_1 x \notin C, s_2 x \in C$.
(d) 任意の $x \in V$ に対して $x \in C \Leftrightarrow -x \in C$.
このとき $x \in X$ に対して

$$N(x) = \inf\{t | t > 0, x/t \in C\}$$

と定義すると $N(\cdot)$ は V 上の norm になることを示せ。

演習 4.1.6. V を実ベクトル空間、N を V 上の norm とする。このとき、

$$C = \{x | N(x) \leq 1\}$$

と定義すると、C は 4.1.5 の (a), (b), (c) の性質を持つことを示せ。さらに C から 4.1.5 の方法で作られた norm は N と一致することを示せ。

演習 4.1.7. $||\cdot||$ を $\mathbb{R}^n$ の norm とする。このとき $||\cdot||$ と $||\cdot||_2$ は同値であることを示せ。
[ヒント：$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的な基底とする。$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ とするとき、$||x|| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| ||e_i||$. これから $\sup_{x \neq 0} ||x||/||x||_2 < +\infty$ を示す。次に $\sup_{x \neq 0} ||x||_2/||x|| < +\infty$ を示す。そうでないとすると、ある $\{x_n\}_{n \geq 1}$ で $||x_n||_2 = 1, \lim_{n\to\infty} ||x_n|| = 0$ となるものがある。]

演習 4.1.8. $(V, ||\cdot||)$ をノルム空間とする。
(1) U を V の閉部分空間とし $U \neq V$ とする。このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して $||v|| = 1$ かつ

$$\inf_{u \in U} ||v - u|| \geq 1 - \epsilon$$

をみたす $v \in V$ が存在することを示せ。
(2) $(V, ||\cdot||)$ を Banach 空間とする。$D = \{v | v \in V, ||v|| \le 1\}$ とおく。D が compact であるための必要十分条件は V が有限次元であることを示せ。
[ヒント：(1) $x \in V \backslash U$ に対して $\alpha = \inf_{y \in U} ||x-y||$ とおく。$\alpha > 0$ であり、任意の $y, u \in U$ に対して

$$\Big|\Big|\frac{x-y}{||x-y||} - u\Big|\Big| = \frac{||x-y-||x-y||\cdot u||}{||x-y||} \ge \frac{\alpha}{||x-y||}.$$

(2) V が無限次元とすると $e_1, e_2, \ldots$ で任意の n に対して $(e_1, \ldots, e_n)$ が1次独立なものがとれる。$(e_1, \ldots, e_n)$ から生成される部分空間を U_n とおくとき、$u_n \in U_n$ で $\inf_{u \in U_{n+1}} ||u_n - u|| \ge 1/2$ をみたすものがある。]

§4.2　L^p 空間

定義 4.2.1. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。
(1) $1 \le p < +\infty$ に対して、

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) = \{f | f \text{ は } X \text{ 上の } \mathcal{M}\text{-可測関数で } f^p \text{ が可積分}\}$$

とする。さらに $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ に対して

$$||f||_p = \Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{1/p}$$

とおく。
(2) $f : X \to \mathbb{R}$ を $\mathcal{M}$-可測関数とする。このとき、

$$||f||_\infty = \inf\{a | \mu(\{x | x \in X, |f(x)| \ge a\}) = 0\}$$

と定義する。$||f||_\infty$ を $|f|$ の essential supremum という。さらに、

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mu) = \{f | f \text{ は } \mathcal{M}\text{-可測であり } ||f||_\infty < +\infty\}$$

　厳密には $f : X \to \mathbb{R}$ または $f : X \to \mathbb{C}$ に応じて $\mathcal{L}^p(X, \mu, \mathbb{R})$ と $\mathcal{L}^p(X, \mu, \mathbb{C})$ が定義される。

補題 4.2.2. $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ とするとき、μ-*a.e.* $x \in X$ で $|f(x)| \le ||f||_\infty$.

証明. $\{x | x \in X, |f(x)| > ||f||_\infty\} = \cup_{n \ge 1}\{x | x \in X, |f(x)| \ge ||f||_\infty + 1/n\}$. いま　$\mu(\{x | x \in X, |f(x)| \ge ||f||_\infty + 1/n\}) = 0$ より $\mu(\{x | x \in X, |f(x)| > ||f||_\infty\}) = 0$. □

補題 4.2.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。
(1)　$p, q \geq 1$ は $1/p + 1/q = 1$ をみたすとする。($p = \infty$ のときは $q = 1$, $p = 1$ のときは $q = \infty$ と考える。) このとき $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu), g \in \mathcal{L}^q(X, \mu)$ に対して $fg \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ であり、

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q \tag{4.2.1}$$

が成立する。
(2)　$1 \leq p \leq \infty$ とする。$f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ ならば $f + g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ であり、

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p. \tag{4.2.2}$$

(4.2.1) を Hölder の不等式、(4.2.2) を Minkowski の不等式と呼ぶ。

注意. $F \in L^p(X, \mu)$ と F の定める $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ の同値類の元 f を同一視することが多い。すなわち $F \in L^p(X, \mu)$ は関数ではないのであるがあたかも $F : X \to \mathbb{R}$ のように扱うことが多い。

証明. $1/p + 1/q = 1$ より $p + q = pq, q = p/(p-1), p = q/(q-1)$ などに注意
(1)　$(p, q) = (1, \infty)$ のときは補題 4.2.2 より μ-a.e. $x \in X$ で $f(x)g(x) \leq f(x)||g||_\infty$ より成立。

$1 < p, q < \infty$ とする。このとき、任意の $a, b \geq 0$ に対して

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{4.2.3}$$

(任意の $c > 0$ で $c \leq c^p/p + 1/q$ を示し $c = ab^{-q/p}$ を代入する。)
いま $A = ||f||_p, B = ||g||_q$ とする。$A = 0$ なら μ-a.e. $x \in X$ で $f(x) = 0$. よって $||fg||_1 = 0$ となり (4.2.1) は成立。$B = 0$ の時も同様。$A > 0$ かつ $B > 0$ と仮定する。ここで、$a = |f(x)|/A, b = |g(x)|/B$ とおき、(4.2.3) に代入して積分すれば、

$$\frac{\int_X |f(x)g(x)| d\mu}{AB} \leq \frac{1}{p} \frac{\int_X |f|^p d\mu}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_X |g|^q d\mu}{B^q} = 1$$

(2)　(a) $p = 1$ のとき: 明らか。
(b) $p = \infty$ のとき:

$$\begin{aligned}\{x | |f(x) + g(x)| > ||f||_\infty + ||g||_\infty\} &\subseteq \{x | |f(x)| + |g(x)| > ||f||_\infty + ||g||_\infty\} \\ &\subseteq \{x | |f(x)| > ||f||_\infty\} \cup \{x | |g(x)| > ||g||_\infty\}\end{aligned}$$

補題 4.2.2 より $\mu(\{x||f(x)+g(x)|>||f||_\infty+||g||_\infty\})=0$. 従って $||f+g||_\infty\le ||f||_\infty+||g||_\infty$.
(c) $1<p<\infty$ のとき: 任意の $t\ge 0$ に対して $(1+t)/(1+t^p)^{1/p}\le C$ となる $C\in(0,+\infty)$ がある。$f,g\in\mathcal{L}^p(X,\mu)$ とするとき、

$$|f(x)+g(x)|^p\le(|f(x)|+|g(x)|)^p\le C^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p).$$

これより $f+g\in\mathcal{L}^p(X,\mu)$. ここで $q>1$ を $1/p+1/q=1$ をみたすようにとる。このとき $p=q(p-1)$ より $|f+g|^{p-1}\in\mathcal{L}^q(X,\mu)$. よって (4.2.1) より

$$\begin{aligned}||f+g||_p^p=\int_X|f+g|^pd\mu&\le\int_X\big(|f+g|^{p-1}|f|+|f+g|^{p-1}|g|\big)d\mu\\&\le||(f+g)^{p-1}||_q(||f||_p+||g||_p)\\&=||f+g||_p^{p/q}(||f||_p+||g||_p).\end{aligned}$$

□

$1\le p\le\infty$ とする。$f,g\in\mathcal{L}^p(X,\mu)$ に対して $f\sim g\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ for μ-a.e. $x\in X$ と定義すると $\sim$ は $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ 上の同値関係である。また $f\sim g$ ならば $||f||_p=||g||_p$ である。

定義 4.2.4. $L^p(X,\mu)=\mathcal{L}^p(X,\mu)/\sim$ と定義し、$F\in L^p(X,\mu)$ に対して F の定める $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ の同値類から代表元 f を選んで、$||F||_p=||f||_p$ とおく。

$f_1\sim g_1$ かつ $f_2\sim g_2$ ならば $f_1+f_2\sim g_1+g_2$. また $f\sim g$ なら $\alpha\in K$ に対して $\alpha f\sim\alpha g$. 従って $L^p(X,\mu)$ は自然に vector space となる。($L^p(X,\mu,\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$-vector space、$L^p(X,\mu,\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$-vector space である。) $||\cdot||_p$ は $L^p(X,\mu)$ の norm となる。

定理 4.2.5. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間、$1\le p\le\infty$ とする。このとき $(L^p(X,\mu),||\cdot||_p)$ は *Banach space* である。

証明. $||f||_p=||f||, L^p(X,\mu)=L^p,\mathcal{L}^p(X,\mu)=\mathcal{L}^p$ と書く。
$p=\infty$ のとき:$\{F_n\}_{n\ge1}$ を L^∞ の Cauchy 列とし、$f_n\in\mathcal{L}^\infty$ を F_n の定める同値類の代表元とする。いま $A_{m,n}=\{x|x\in X,|f_m(x)-f_n(x)|>||f_m-f_n||\}$ とおくと、$\mu(A_{m,n})=0$. 従って $A=\cup_{n,m\ge1}A_{m,n}$ とすると $\mu(A)=0$ である。ここで任意の $x\in A$, 任意の $n\ge1$ に対して $f_n(x)=0$ とおいても一般性を失わない。このとき任意の $x\in X$, 任意の $n,m\ge1$ に対して $|f_m(x)-f_n(x)|\le||f_m-f_n||$ であるので、$\{f_n(x)\}_{n\ge1}$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列である。$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ と定義するとき、命題 2.2.4-(3) より f は $\mathcal{M}$-

可測。さらに $\{||f_n||\}_{n\geq 1}$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列であるので任意の $x \in X$ に対して $|f(x)| \leq \sup_{n\geq 1} ||f_n|| < +\infty$. よって $f \in \mathcal{L}^\infty$ である。さらに、$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||$ で $m \to \infty$ とすれば、$||f_n - f|| \leq \limsup_{m\to\infty} ||f_n - f_m||$. よって $n \to \infty$ で $||f_n - f|| \to 0$. f の属する同値類を F であらわせば、$||F_n - F|| \to 0$ as $n \to \infty$.

$1 \leq p < \infty$ のとき：F_n, f_n を $p = \infty$ の場合と同じようにとる。いま $\{f_n\}_{n\geq 1}$ の部分列で、ある $f \in \mathcal{L}^p$ に収束するものがとれれば、$\{f_n\}_{n\geq 1}$ 自身が $n \to \infty$ で f に収束することに注意する。ここで、$n_1 < n_2 < \ldots$ で任意の $i \geq 1$ と任意の $m \geq n_i$ に対して、

$$||f_{n_i} - f_m|| \leq 2^{-i}$$

をみたすものが帰納的に選べる。ここで $g_k = f_{n_k}$ とおくと $||g_k - g_{k+1}|| \leq 2^{-k}$ である。いま、

$$h_k(x) = |g_1(x)| + \sum_{i=1}^{k-1} |g_{i+1}(x) - g_i(x)|$$

とおくとき、$\{h_k\}_{k\geq 1}$ は非負の単調増大列である。いま

$$||h_k|| \leq ||g_1|| + \sum_{i=1}^{k-1} ||g_{i+1} - g_i|| \leq ||g_1|| + 1 < +\infty$$

である。よって $h(x) = \lim_{k\to\infty} h_k(x)$ とおくとき、単調収束定理より（定理 2.2.7）より、h は $\mathcal{M}$-可測であり、

$$\int_X h(x)^p d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X h_k(x)^p d\mu \leq (||g_1|| + 1)^p$$

従って $h \in \mathcal{L}^p$ である。ここで、

$$g_k(x) = g_1(x) + \sum_{i=1}^{k-1} (g_{i+1}(x) - g_i(x))$$

であり、$h(x) < \infty$ となる x では左辺は $k \to \infty$ で絶対収束する。よって μ-a.e. $x \in X$ で $g_k(x)$ は各点収束する。その極限を g と書くとき、$|g(x)| \leq h(x)$ であるから $g \in \mathcal{L}^p$. いま、

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |g_k(x) - g_{k+1}(x)| \leq h(x)$$

従って、Lebesgue の収束定理（定理 2.4.4）により、$||g_n - g|| \to 0$ as $n \to \infty$. 以上より、$\{f_n\}_{n\geq 1}$ の部分列で収束するものがとれた。 $\square$

定義 4.2.6. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間、$p\in[1,\infty]$ とする。$f,f_1,f_2,\ldots\in L^p(X,\mu)$ であり $n\to\infty$ で $||f_n-f||_p\to 0$ が成り立つとき、$\{f_n\}_{n\geq 1}$ は $n\to\infty$ で f に L^p-収束するという。

命題 4.2.7. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間、$\mathcal{O}$ を X の位相とし $\mathcal{B}(X,\mathcal{O})\subseteq\mathcal{M}$ とする。いま、任意の開集合 O に対して $\mu(O)>0$ とする。$C(X,\mathcal{O})$ を X 上の位相 $\mathcal{O}$ に関する連続関数の全体とする。このとき $f,g\in C(X,\mathcal{O})$ で μ-*a.e.* $x\in X$ で $f(x)=g(x)$ ならば任意の $x\in X$ で $f(x)=g(x)$.

$C(X,\mathcal{O})$ の定義は厳密には、$K=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ に対して、$C(X,\mathcal{O},K)=\{f|f:X\to K, f$ は $\mathcal{O}$ に関して連続$\}$ である。

上の命題より μ が命題の条件を満たしていれば $f\in\mathcal{L}^p(X,\mu)$ の同値類の中に連続なものは高々１つしか存在しない。特に、$f,g\in C(X,\mathcal{O})\cap\mathcal{L}^p(X,\mu)$ に対して $f\sim g$ ならば $f=g$ であるので $C(X,\mathcal{O})\cap\mathcal{L}^p(X,\mu)$ は $L^p(X,\mu)$ の部分集合と考えることが出来る。

証明. $A=\{x|x\in X,f(x)\neq g(x)\}$ とするとき、$\mu(A)=0$. いま $x\in A$ に対して $f(x)\neq g(x)$ より $f(x)$ の近傍 U と $g(x)$ の近傍 V を $U\cap V=\emptyset$ となるようにとれる。ここで $f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)$ は空でない開集合であるが、任意の $y\in f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)$ に対して $f(y)\neq g(y)$ より $f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)\subseteq A$. これより $\mu(f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V))=0$. これは $f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)$ が空でない開集合であることに矛盾。 □

演習 4.2.1 にあるように $1\leq p<+\infty$ のときは 「L^p-収束ならば、ほとんど至るところ各点収束する。」とはいえない。その代わり一般には次の事実が成り立つ。

補題 4.2.8. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間、$p\in[1,\infty]$, $f,f_1,f_2,\ldots\in L^p(X,\mu)$ であり、$m\to\infty$ で $||f_m-f||_p\to 0$ とする。
(1) $p=\infty$ のときは $\{f_m(x)\}_{m\geq 0}$ は μ-*a.e.* $x\in X$ で $f(x)$ に収束する。
(2) $1\leq p<\infty$ のとき $\{f_m\}_{m\geq 1}$ の部分列で、μ-*a.e.* $x\in X$ において $m\to\infty$ で各点収束するものが存在する。

証明. $\{f_m\}_{m\geq 0}$ は $L^p(X,\mu)$ における Caucy 列であることに注意する。
(1) 定理 4.2.5 の証明の議論より明らか。
(2) 定理 4.2.5 の証明の議論より $\{f_m\}_{m\geq 1}$ の部分列 $\{g_k\}_{k\geq 0}$ で μ-a.e. $x\in X$ で $\{g_k(x)\}_{k\geq 0}$ が $g(x)$ に $k\to\infty$ で収束し、さらに $||f_m-g||_p\to 0$ as $m\to\infty$ となるものがとれる。このとき μ-a.e. $x\in X$ で $f(x)=g(x)$ より題意は示された。 □

定義 4.2.9. $(X,\mathcal{M},\mu)=(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\#)$ のとき $L^p(X,\mu)=\ell^p$ とかく。

$$\ell^p = \{\{a_n\}_{n\geq 1} | \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < +\infty\}$$

であり $\{a_n\}_{n\geq 1} \in \ell_p$ に対して、

$$||\{a_n\}_{n\geq 1}||_p = \big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\big)^{1/p}$$

である。$\{a_n\}_{n\geq 1}$ として実数列を考えるとき $\ell^p(\mathbb{R})$ と、複素数列を考えるときは $\ell^p(\mathbb{C})$ と書く。

演習 4.2.1. m_1 を 1 次元 Lebesgue 測度（の区間 $[0,1]$ への制限）とする。$1 \leq p < +\infty$ に対して $L^p([0,1], m_1)$ の Cauhy 列 $\{f_m\}_{m\geq 1}$ で任意の $x \in [0,1]$ に対して $\{f_m(x)\}_{m\geq 1}$ が収束しないような例を作れ。
[ヒント：$n = 0, 1, \ldots, m = 0, \ldots, 2^n - 1$ に対して $A_{2^n+m} = [m/2^n, (m+1)/2^n]$ とおいて、$A_1, A_2, \ldots$ を定義する。$f_i = \chi_{A_i}$ とおく。ただし χ_A は集合 A の定義関数である。]

演習 4.2.2. m_1 を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度とし、$L^p = L^p(\mathbb{R}, m_1)$ とする。次の (1), (2), に対して正しければ証明し、間違っていれば反例を挙げよ。
(1)　$L^1 \subseteq L^2$
(2)　$L^2 \subseteq L^1$.

演習 4.2.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$L^p = L^p(X, \mu)$ とおく。$p_1, \ldots, p_n \in [1, \infty]$ とする。いま $\sum_{j=1}^n 1/p_j = 1/q$ とおく。このとき $f_j \in L^{p_j}$ ならば $f_1 \cdots f_n \in L^q$ であり、$||f_1 \cdots f_n||_q \leq ||f_1||_{p_1} \cdots ||f_n||_{p_n}$ を示せ。

演習 4.2.4. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。
(1)　$S = \{f | f$ は μ-可積分な単関数$\}$ とするとき、任意の $1 \leq p < \infty$ に対して S は $L^p(X, \mu)$ の稠密な部分集合であるいことを示せ。
(2)　$1 \leq p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ とするとき、$L^p \cap L^q$ は L^p で稠密であることを示せ。

演習 4.2.5. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。
(1)　$\mu(X) < +\infty$ のとき任意の $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ に対して、$L^{p_2}(X, \mu) \subseteq L^{p_1}(X, \mu)$ であり任意の $f \in L^{p_2}(X, \mu)$ に対して

$$||f||_{p_1} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} ||f||_{p_2}$$

を示せ。
(2) $p \in [1,\infty)$ とする。$L^p(X,\mu) \cap L^\infty(X,\mu)$ が $L^\infty(X,\mu)$ で稠密となるための必要十分条件は $\mu(X) < +\infty$ であることを示せ。

[ヒント：(1) $p = p_2/p_1, q = p_2/(p_2 - p_1)$, $F = |f|^{p_1}, G = \chi_X$ として Hölder の不等式を使う。(2) $1 = \chi_X \in L^\infty(X,\mu)$. $||1 - f||_\infty \leq 1/2$ のとき $||f||_\infty$ は？]

演習 4.2.6. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする。このとき任意の $p \in [1,\infty]$ に対して $f \in L^p(X,\mu)$ となるための必要十分条件は $f \in L^1(X,\mu) \cap L^\infty(X,\mu)$ であることを示せ。

演習 4.2.7. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする。$1 \leq p \leq q \leq \infty$ に対して、

$$\bigcap_{r\in[p,q]} L^r(X,\mu) = L^p(X,\mu) \cap L^q(X,\mu)$$

を示せ。

§4.3 Hilbert 空間

以下 $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする。

定義 4.3.1. V を K-vector space とする。$(\cdot,\cdot) : V \times V \to K$ が V の内積 (inner product) であるとは、
(HS1) 任意の $x \in V$ に対して $(x,x) \in [0,+\infty)$ であり、$(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(HS2) 任意の $x, y \in V$ に対して $(x,y) = \overline{(y,x)}$.
(HS3) 任意の $a_1, a_2 \in K$, 任意の $f_1, f_2, g \in V$ に対して $(a_1f_1 + a_2f_2, g) = a_1(f_1,g) + a_2(f_2,g)$.
をみたすこと。V とその内積 $(\cdot,\cdot)$ の対 $(V,(\cdot,\cdot))$ を metric vector space（計量ベクトル空間） または pre-Hilbert space という。

命題 4.3.2. $(V,(\cdot,\cdot))$ を *pre-Hilbert space* とする。このとき、$x \in X$ に対して $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ と定義すれば $||\cdot||$ は V 上の *norm* になる。

定義 4.3.3. $(V,(\cdot,\cdot))$ を pre-Hilbert space とする。命題 4.3.2 の norm から決まる V の距離および位相を内積 $(\cdot,\cdot)$ から決まる V 上の距離および位相という。内積 $(\cdot,\cdot)$ から決まる V 上の距離に関して V が完備であるとき $(V,(\cdot,\cdot))$ を (K-)Hilbert space という。

例 4.3.4. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。このとき、$f, g \in L^2(X, \mu)$ に対して、

$$(f, g) = \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu$$

と定義すると $(\cdot, \cdot)$ は $L^2(X, \mu)$ の内積である。（Hölder の不等式 (4.2.1) により $f\bar{g} \in L^1(X, \mu)$）この内積から決まる norm は $||\cdot||_2$ であるので、$(L^2(X, \mu), (\cdot, \cdot))$ は Hilbert space である。特に、$\ell_2(\mathbb{R}), \ell_2(\mathbb{C})$ の場合は、

$$(\{a_i\}, \{b_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \overline{b_i}$$

である。

定義 4.3.5. $(V, (\cdot, \cdot))$ を pre-Hilbert space とする。$I = \mathbb{N}$ or $\{1, \ldots, m\}$ $(m \in \mathbb{N})$ とする。$(e_i)_{i \in I}$ （$e_i \in V$) が $(V, (\cdot, \cdot))$ の正規直交系 (orthonormal system) であるとは、任意の $i, j \in I$ に対して $(e_i, e_i) = \delta_{ij}$ が成り立つことである。

命題 4.3.6. $(V, (\cdot, \cdot))$ を *pre-Hilbert space,* $(e_i)_{i \in I}$ をその正規直交系とする。このとき、任意の $x \in V$ に対して

$$(x, x) \geq \sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2 \tag{4.3.1}$$

とくに $(V, (\cdot, \cdot))$ が *Hilbert space* ならば $\sum_{i \in I} (x_i, e_i) e_i$ は収束し、その極限を x_* とするとき $(x_*, x_*) = \sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2$.

(4.3.1) を Bessel の不等式という。

証明. $I = \mathbb{N}$, $K = \mathbb{R}$ とする。（$I = \{1, \ldots, m\}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ の場合も同様）任意の $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ に対して、

$$(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i, \sum_{i=1}^{m} b_i e_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$$

である。ここで、$x_m = \sum_{i=1}^{m} (x, e_i) e_i$ とおけば、

$$||x - x_m||^2 = (x, x) - \sum_{i=1}^{m} (x, e_i)^2 = (x, x) - (x_m, x_m) \tag{4.3.2}$$

これより $(x,x) \geq \sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)^2$. $(V,(\cdot,\cdot))$ を Hilbert space とする。$N \leq n < m$ ならば、

$$||x_m - x_n||^2 = \sum_{i=n+1}^{m}(x,e_i)^2 \leq \sum_{i \geq N}(x,e_i)^2$$

よって $\{x_m\}_{m\geq 1}$ は Cauchy 列であり極限をもつ。その極限を x_* とおくと、$(x_*,x_*) = \lim_{n\to\infty}(x_n,x_n) = \sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)^2$. □

定理 4.3.7. $(V,(\cdot,\cdot))$ を *Hilbert space*、$(e_i)_{i\in I}$ を正規直交系とする。このとき次の 3 つの条件は同値である。
(1) 任意の $x \in V$ に対して $x = \sum_{i\in I}(x_i,e_i)e_i$.
(2) 任意の $x \in V$ に対して、

$$(x,x) = \sum_{i\in I}|(x_i,e_i)|^2 \tag{4.3.3}$$

(3) $U = \{\sum_{i=1}^{m} a_i e_i | m \in I, a_1,\ldots,a_m \in K\}$ が V で稠密

(4.3.3) を Parseval の等式いう。

定義 4.3.8. $(V,(\cdot,\cdot))$ を Hilbert space, $(e_i)_{i\in I}$ をその正規直交系とする。$(e_i)_{i\in I}$ が定理 4.3.7 の条件のいずれかをみたすとき $(e_i)_{i\in I}$ は $(V,(\cdot,\cdot))$ の完全正規直交系 (complete orthonormal system) であるという。

証明. $I = \mathbb{N}, K = \mathbb{R}$ とする。$x_* = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i,e_i)e_i$ とおく。
(1) ⇒ (2)：命題 4.3.6 より $(x_*,x_*) = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i,e_i)^2$. $x = x_*$ より (4.3.3) がでる。
(2) ⇒ (1)：(4.3.2) より

$$(x-x_*,x-x_*) = \lim_{m\to\infty}(x-x_m,x-x_m) = (x,x) - \lim_{m\to\infty}(x_m,x_m) = 0$$

(1) ⇒ (3)：明らか
(3) ⇒ (1)：任意の i に対して $(x_*,e_i) = (x,e_i)$. よって、任意の $z \in U$ に対して

$$(x-x_*-z,x-x_*-z) = (x-x_*,x-x_*) + (z,z) \geq (x-x_*,x-x_*).$$

(3) より $z \in U$ で上の式の左辺がいくらでも 0 に近くなるものがある。よって $||x-x_*|| = 0$. すなわち $x = x_*$. □

定理 4.3.9. *separable Hilbert space* は完全正規直交系を持つ。

証明. $(V,(\cdot,\cdot))$ を separable Hilbert space とする。$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を V の稠密な可算部分集合とする。(任意の i に対して $x_i\neq 0$ としても一般性を失わない。)
このとき、I および正規直交系 $(e_i)_{i\in I}$ で任意の n に対して
「U_n を $e_1,\ldots,e_n$ で生成される V の部分空間とするとき、$x_1,\ldots,x_n\in U_n$.」
を満たすものを次のアルゴリズム (I), (II) で帰納的に構成する。
(I) $n=1$ では $e_1=x_1/||x_1||$ とする。$e_1\in U_1$ は明らか。
(II) $n=m$ まで条件を満たすものが構成できたとき、
任意の $k\geq 1$ で $x_{m+k}\in U_m$ ならば $I=\{1,\ldots,m\}$ として終了。
そうでなければ $x_{m+k}\notin U_m$ となる最小の k をとり、e_{m+1} を

$$y=x_{m+k}-\sum_{i=1}^{m}(x_{m+k},e_i)e_i \quad \text{とおいて} \quad e_{m+1}=y/||y||$$

と定義する。このとき $(e_1,\ldots,e_{m+1})$ は正規直交系となり $x_{m+1}\in U_{m+1}$.
$n=m+1$ として (2) に戻る。
(II) の構成が無限に続くときは $I=\mathbb{N}$ とする。この構成法によりできた $(e_i)_{i\in I}$ に対して任意の i で $x_i\in U$. $\{x_i\}_{i\geq 1}$ は V で稠密より U も V で稠密。定理 4.3.7 より $(e_i)_{i\in I}$ は V の完全正規直交系である。 □

演習 4.3.1. $(V,(\cdot,\cdot))$ を pre-Hilbert space とし、$x\in V$ に対して $||x||=\sqrt{(x,x)}$ とおく。このとき任意の $x,y\in V$ に対して、

$$||x+y||^2+||x-y||^2=2||x||^2+2||y||^2 \tag{4.3.4}$$

を示せ。

演習 4.3.2. $(V,||\cdot||)$ を実 norm 空間とする。任意の $x,y\in V$ に対して (4.3.4) が成り立つとする。このとき、V の内積 $(\cdot,\cdot)$ で $||x||^2=(x,x)$ をみたすものが存在することを示せ。
[ヒント:もし $(\cdot,\cdot)$ が存在するなら $2(x,y)=(x+y,x+y)-(x-y,x-y)$]

演習 4.3.3. $(V,(\cdot,\cdot))$ を pre-Hilbert space ,$\{x_n\}_{n\geq 1}\subset V$ とする。$x\in V$ に対して $||x||=\sqrt{(x,x)}$ と定義する。ある $c\geq 0$ に対して任意の $n,m\geq 1$ で

$$||\frac{x_n+x_m}{2}||\geq c \qquad \text{かつ} \qquad \lim_{n\to\infty}||x_n||=c$$

をみたすとする。このとき $\{x_n\}_{n\geq 1}$ は V の Cauchy 列となることを示せ。

Chapter 5

Fourier 級数

§5.1 Fourier 級数の定義

$S^1 = \mathbb{R}/(2\pi)\mathbb{Z}$ とする。$L^2(S^1, \mu, \mathbb{C}) = L^2([0, 2\pi], m_1, \mathbb{C}) = L^2([-\pi, \pi], m_1, \mathbb{C})$ に注意。（m_1 は Lebesgue 測度）以降この空間を $L^2(S^1)$ と書く。$f, g \in L^2(S^1)$ に対して、

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

と定義する。$L^2(S^1)$ は $(\cdot, \cdot)$ を内積とする Hilbert space である。

ここで $m = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ に対して

$$C^m(S^1) = \{f | f : S^1 \to \mathbb{C}, f \text{ は } C^m \text{ 級}\}$$

（C^0 級 = 連続）さらに、

$$C^m_P(\mathbb{R}) = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f \text{ は } 2\pi \text{ を周期とする周期関数で } C^m \text{ 級}\}$$

とおく。このとき、$C^m(S^1)$ と $C^m_P(\mathbb{R})$ は同一視できる。また、$C^m(S^1) \subseteq L^2(S^1, m_1)$.

命題 5.1.1. $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

と定義する。ただし $n = 0$ のときは $\varphi_0(x) = (2\pi)^{-1/2}$ とする。このとき $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(S^1)$ の正規直交系である。

定義 5.1.2. $f \in L^1(S^1) = L^1([0, 2\pi])$ とする。$n \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$F_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

とおき、

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n(f)e^{inx}$$

を f の（形式的）Fourier 級数展開という。

補題 5.1.3. *$f \in L^2(S^1)$ のとき f の Fourier 級数展開は $L^2(S^1)$ では収束し、*

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \geq 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_n(f)|^2 \tag{5.1.1}$$

証明. $f \in L^2(S^1, m_1)$ のときは $F_n(f) = \sqrt{2\pi}(f, \varphi_n)$ かつ $F_n(f)e^{inx} = (f, \varphi_n)\varphi_n$ である。命題 5.1.1 より $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(S^1)$ の 正規直交系である。よって命題 4.3.6 より補題が示される。 □

(5.1.1) も Bessel の不等式と呼ばれる。

$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt, \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

とおくとき

$$F_n(f)e^{inx} + F_{-n}(f)e^{-inx} = a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx$$

であるので、形式的 Fourier 級数展開は、

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos nx + \sum_{n\geq 1} b_n(f)\sin nx$$

と書くこともできる。ここで

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

も $L^2(S^1)$ の正規直交系であることに注意。

演習 5.1.1. $[0,2\pi)$ 上定義された次の関数の Fourier 級数展開を求めよ。
(1) $f(x)=x$
(2) $[0,\pi)$ 上で $f(x)=-1$, $[\pi,2\pi)$ 上で $f(x)=1$.

演習 5.1.2. (1) $\theta\in\mathbb{R}$ に対して $T_\theta: L^2(S^1)\to L^2(S^1)$ を $(T_\theta f)(x)=f(x-\theta)$ と定義する。f と $T_\theta f$ の Fourier 級数展開の間の関係を求めよ。
(2) $R: L^2(S^1)\to L^2(S^1)$ を $(Rf)(x)=f(-x)$ と定義する。このとき f と Rf の Fourier 級数展開の間の関係を求めよ。

演習 5.1.3. (1) $f,g\in L^2(S^1)$ に対して、

$$(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)dy$$

と定義する。このとき $f*g\in L^2(S^1)$ であり、$||f*g||_2\le ||f||_2||g||_2$ が成立することを示せ。
(2) $f,g\in L^2(S^1)$ に対して $f,g,f*g$ の Fourier 級数展開をそれぞれ $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi_n$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\varphi_n$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi_n$ とするとき、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}},\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の間の関係を求めよ。

演習 5.1.4. $\Delta: C^\infty(S^1)\to C^\infty(S^1)$ を $(\Delta f)(x)=f''(x)$ と定義する。
(1) $f\in C^\infty(S^1),\lambda\in\mathbb{C}$ に対して $\Delta f=-\lambda f$ となるとき $\lambda\in[0,+\infty)$ であることを示せ。
(2) 「$f\in C^\infty(S^1),\lambda\in\mathbb{C}$ に対して $\Delta f=-\lambda f$ となるための必要十分条件はある $n\in\{0,1,\ldots\},a,b\in\mathbb{C}$ に対して $\lambda=n^2$ で $f=a\varphi_n+b\varphi_{-n}$ と表されることである。」これを示せ。
(3) $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(S^1)$ の完全正規直交系であることを認める。$u_0\in L^2(S^1)$ に対して、$x\in S^1,t>0$ で

$$u(x,t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(u_0,\varphi_n)e^{-n^2t}\varphi_n(x)$$

と定義する。このとき $u(x,t)$ は $S^1\times(0,+\infty)$ 上で C^2 級であり、$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ をみたすことを示せ。さらに $u_t(x)=u(x,t)$ するとき、$t\downarrow 0$ で $||u_0-u_t||_2\to 0$ を示せ。

§5.2 Fourier 級数の収束１

Fourier 級数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n(f)e^{inx}$ の収束は、$\sum_{i\in\mathbb{Z}}(f,\varphi_n)\varphi_n$ の収束にほかならない。いま

$$S_N(f)=\sum_{n:|n|\le N}F_n(f)e^{inx}=\sum_{n:|n|\le N}(f,\varphi_n)\varphi_n$$

と定義する。このとき、

$$(f, \varphi_n)\varphi_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{in(x-t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)e^{int}dt$$

である。ここで、

$$\sum_{|n|\leq N} e^{int} = \frac{\cos Nt - \cos{(N+1)t}}{1-\cos t}$$

よって、

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)\frac{\cos Nt - \cos{(N+1)t}}{1-\cos t}dt. \tag{5.2.1}$$

である。

定理 5.2.1 (Fejér の定理)**.** $f \in C^0(S^1)$ とする。いま $\sigma_N(f) = N^{-1}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$ とおけば $\sigma_N(f)$ は f に S^1 上 $N \to \infty$ で一様収束する。

無限級数 $\sum_{n\geq 1} a_n$ に対して、$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n, \sigma_N = N^{-1}\sum_{n=1}^{N} S_n$ とおく。このとき $S \in \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \Rightarrow \quad \lim_{N\to\infty} \sigma_N = S$$

このとき $\Leftarrow$ の逆は成り立たない。たとえば、$a_n = (-1)^n$ のとき、$N \to \infty$ で $\sigma_N \to 0$ であるが、$\sum_{n\geq 1} a_n$ は収束しない。一般に $N \to \infty$ で $\sigma_N \to S$ となるとき、S を $\sum_{n\geq 1} a_n$ の Cesàro の意味の和（Cesàro mean, Cesàro の総和法による和）という。

証明. (5.2.1) より、

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{1-\cos Nt}{1-\cos t}dt \tag{5.2.2}$$

とくに $f = 1$ のときは、

$$\sigma_N(1) = 1 = \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos Nt}{1-\cos t}dt$$

したがって、

$$\sigma_N(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t)-f(x))\frac{1-\cos Nt}{1-\cos t}dt$$

である。いま $f \in C^0(S^1)$ より f は一様連続であるので、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって $|t| < \delta$ ならば任意の x に対して $|f(x-t)-f(x)| < \epsilon$. よって、

$$\frac{1}{2\pi N}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x-t)-f(x)|\frac{1-\cos Nt}{1-\cos t}dt \leq \frac{\epsilon}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos Nt}{1-\cos t}dt \leq \epsilon.$$

また $\delta \leq |t| \leq \pi$ では $0 \leq \cos t \leq \cos\delta < 1$. 従って

$$\frac{1-\cos Nt}{1-\cos t} \leq \frac{2}{1-\cos\delta}.$$

さらに $|f(x-t)-f(x)| \leq 2||f||_\infty$. よって、

$$\frac{1}{2\pi N}\int_{\delta}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|\frac{1-\cos Nt}{1-\cos t}dt \leq \frac{2||f||_\infty}{N(1-\cos\delta)}$$

$\int_{-\pi}^{-\delta}$ についても同様の評価が成り立つので、

$$|\sigma_N(f)(x)-f(x)| \leq \epsilon + \frac{4||f||_\infty}{N(1-\cos\delta)}.$$

N を十分大きくとれば、

$$|\sigma_N(f)(x)-f(x)| \leq 2\epsilon$$

である。従って、$\sigma_N(f)$ は $N\to\infty$ で f に一様収束する。 □

系 5.2.2. $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(S^1)$ の完全正規直交系である。すなわち任意の $f \in L^2(S^1)$ に対して $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n(f)e^{inx}$ は $L^2(S^1)$ で収束し f に等しい。

補題 (X,d) は距離空間、$(X,\mathcal{M},\mu)$ を Borel 正則な測度空間とする。さらに開集合の単調増大列 $\{U_n\}_{n\geq 1}$ があって、$\mu(\overline{U}) < +\infty$ かつ $\cup_{n\geq 1}U_n = X$ をみたすとする。このとき、$1 \leq p < +\infty$ に対して $C^0(X)\cap L^p(X,\mu)$ は $L^p(X,\mu)$ で稠密である。

証明. $f \in L^p(X,\mu)$ とする。任意の $\epsilon > 0$ に対してある単関数 u があって $||f-u||_p < \epsilon$ となる。$u = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{M}, \mu(A_i) < +\infty$ と書けるので各々の χ_{A_i} が L^p において連続関数で任意に近似できれば、f も連続関数で近似できる。すなわち、次のことを証明すれば良い。
主張：任意の $A \in \mathcal{M}$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して $u \in C^0(X)\cap L^p(X,\mu)$ で

$||\chi_A - u||_p < \epsilon$ となるものがある。
主張を証明する。$A \in \mathcal{M}, \mu(A) < +\infty$ とする。

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) | U \supseteq A, U \text{ は開集合}\} = \sup\{\mu(V) | V \subseteq A, V \text{ は閉集合}\}$$

これより、任意の $\epsilon > 0$ に対して開集合 U と閉集合 V があって、$V \subseteq A \subseteq U$ であり、$\mu(U \backslash V) < \epsilon$ とできる。ここで、 Urysohn の補題により $u \in C^0(X)$ で $u|_{U^c} \equiv 0, u|_V \equiv 1$ かつ $0 \leq u \leq 1$ をみたすものが存在する。このとき、

$$\int_X |\chi_{A_i} - u|^p d\mu \leq \int_X \chi_{U \backslash V} d\mu < \epsilon$$

従って主張は証明された。 □

証明. $U = \{\sum_{|n| \leq m} a_n \varphi_n | m \geq 0, a_n \in \mathbb{C}\}$ とおくとき、U は $C^0(S^1)$ において $|| \cdot ||_\infty$ に関して稠密である。いま $C^0(S^1) \subseteq L^2(S^1)$ であり $|| \cdot ||_2 \leq (2\pi)^{-1/2} || \cdot ||_\infty$ より U は $C^0(S^1)$ において $|| \cdot ||_2$ に関して稠密である。さらに定理 3.1.1 及び 3.1.6 より、任意の $f \in L^2(S^1)$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して、$\int_0^{2\pi} |f^2 - G| dx < \epsilon$ となる $G \in C^0(S^1)$ が存在する。ここで $f \geq 0$ とするとき $G \geq 0$ としてもよい。このとき $g = G^{1/2}$ とすると、

$$|f - g|^2 \leq |f - g||f + g| = |f^2 - G|$$

従って $||f - g||_2 \leq \epsilon$. 一般の $f \in L^2(S^1)$ についても f_+, f_- に分解することで、$C^0(S^1)$ が $L^2(S^1)$ で稠密であることが分かる。以上より、U は $L^2(S^1)$ で稠密であり定理 4.3.7 より $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ は $L^2(S^1)$ の完全正規直交基底になる。 □

系 5.2.3 (Weierstrass の多項式近似定理)**.**

$$C([0,1]) = \{f | f : [0,1] \to \mathbb{C}, f \text{ は } [0,1] \text{ 上連続}\}$$

とする。多項式の全体は $C([0,1])$ で $||\cdot||_\infty$ に関して稠密である。すなわち任意の $f \in C([0,1])$ に対して f に $n \to \infty$ で一様収束する多項式の列 $\{f_n\}_{n \geq 1}$ が存在する。

証明. $f \in C([0,1])$ に対して、$F \in C^0(S^1)$ で $F|_{[0,1]} = f$ となるものが存在する。ここで、φ_n はそのベキ級数展開を考えれば $[0,1]$ 上多項式で一様に近似できる。(注１) 従って $\sigma_N(F)$ は $[0,1]$ 上多項式で近似できる。定理 5.2.1 より $\sigma_N(F)$ は F に $N \to \infty$ で一様収束するのだから f は $[0,1]$ 上多項式で一様に近似できる。 □

(注１): f を $|z|<R$ 上の正則関数とするとき、$0<r<R$ とし、$|z|<r$ ならば Cauchy の積分公式より

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{f(\xi)}{\xi}\frac{1}{1-\frac{z}{\xi}}d\xi$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{f(\xi)}{\xi}\Big(1+\frac{z}{\xi}+\frac{z^2}{\xi^2}+\frac{z^3}{\xi^3}+\cdots\Big)d\xi$$

$f^{(n)}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi$ より

$$\Big|f(z)-\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n\Big|\leq\frac{1}{2\pi}\Big|\int_{|\xi|=r}\frac{f(\xi)}{\xi}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{z^n}{\xi^n}d\xi\Big|$$
$$\frac{1}{2\pi}\Big|\int_{|\xi|=r}\frac{f(\xi)z^{N+1}}{\xi^{N+1}(\xi-z)}\Big|\leq\frac{|z|^{N+1}}{r^N(r-|z|)}\sup_{|\xi|=r}|f(\xi)|$$

演習 5.2.1. $f\in\mathcal{L}^1(S^1)$ であり f は x で連続であるとする。このとき $N\to\infty$ で $\sigma_N(f)(x)\to f(x)$ を示せ。

演習 5.2.2. $f\in\mathcal{L}^1(S^1)$ であり x において $f(x\pm 0)=\lim_{a\to\pm 0}f(x+a)$（複号同順）が存在するとき、$N\to\infty$ で

$$\sigma_N(f)\to\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

が成立することを示せ。

§5.3 Fourier 級数の収束２

定理 5.3.1. $f\in C^2(S^1)$ とするとき、任意の $N\geq 1$ に対して

$$||S_N(f)-f||_\infty\leq\frac{1}{N\pi}||f''||_1$$

特に $S_N(f)$ は f に $N\to\infty$ で一様収束する。

定義 5.3.2. $f:S^1\to\mathbb{C}$ が区分的に C^1 であるとは、ある $0=x_0<x_1<\ldots<x_m=2\pi$ と 任意の $k=1,\ldots,m$ に対して $[x_{k-1},x_k]$ 上 C^1 級の $f_k:[x_{k-1},x_k]\to\mathbb{C}$ があって、 $x\in(x_{k-1},x_k)$ ならば $f(x)=f_k(x)$ となること。

補題 5.3.3. $f \in C^0([0,2\pi])$ かつ区分的に C^1 級ならば、

$$F_n(f') = \frac{(f(2\pi) - f(0))}{2\pi} + inF_n(f)$$

$f \in C^2([0,2\pi])$ ならば

$$F_n(f'') = \frac{(f'(2\pi) - f'(0))}{2\pi} + \frac{in(f(2\pi) - f(0))}{2\pi} - n^2 F_n(f)$$

定理 *5.3.1* の証明. 補題 5.3.3 より

$$n^2|F_n(f)| = |F_n(f'')| \leq \frac{||f''||_1}{2\pi}$$

従って

$$\sum_{|n|\geq N+1} |F_n(f)| \leq \frac{||f''||_1}{\pi} \int_N^\infty \frac{1}{x^2} dx \leq \frac{||f''||_1}{N\pi}$$

とくに $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_n(f)| < +\infty$. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_n(f)|$ は $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n(f)e^{inx}$ の優級数なので、$S_N(f)$ は $N \to \infty$ で絶対一様収束し、その極限を g とおくと、$g \in C^0(S^1)$ で

$$||S_N(f) - g||_\infty \leq \frac{||f''||_1}{N\pi}.$$

一方、系 5.2.2 より $S_N(f)$ は $N \to \infty$ で f に $L^2(S^1)$ で収束している。補題 4.2.8 より $\{S_{N_j}(f)\}_{j\geq 1}$ で a.e.$x \in S^1$ において $\lim_{j\to\infty} S_{N_j}(f)(x) = f(x)$ となるものがとれる。いま $\lim_{j\to\infty} S_{N_j}(f)(x) = g(x)$ なので、a.e. $x \in S^1$ で $f(x) = g(x)$. f, g は連続なので、$f = g$. よって、

$$|S_N(f) - f(x)| \leq \sum_{|n|\geq N+1} |F_n(f)| \leq \frac{||f''||_1}{N\pi}$$

□

定理 5.3.4. $f \in C^0(S^1)$ で、f は区分的に C^1 級とする。このとき $S_N(f)$ は $N \to \infty$ で f に絶対一様収束する。

証明. 補題 5.3.3 より $F(f') = inF_n(f)$. いま $f' \in L^2(S^1)$ であるので、

$$\sum_{n\geq 1} F(f')^2 = \sum_{n\geq 1} n^2 F_n(f)^2 < +\infty.$$

相加相乗平均の関係より、

$$|F_n(f)| \le \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2} + n^2 F_n(f)^2\Big).$$

これらより $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_n(f)| < +\infty$. 優級数が収束するので、$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n(f)e^{inx}$ は絶対一様収束する。あとは定理 5.3.4 の証明と同様 $\square$

じつはある定数 $C > 0$ があって、任意の $f \in C^1(S^1)$ および任意の N に対して、

$$||S_N(f) - f||_\infty \le \frac{C||f'||_\infty}{\sqrt{N}}$$

が成立する。

定理 5.3.5. $f \in \mathcal{L}^2(S^1)$ とする。$x \in S^1$ に対して $f(x\pm 0) = \lim_{a\to\pm 0} f(x+a)$（複号同順）が存在し、さらに

$$f'(x\pm 0) = \lim_{h\to\pm 0} \frac{f(x+h) - f(x\pm 0)}{h}$$

（複号同順）が存在するとき、

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

証明. $D_N(x) = \dfrac{\sin{(N+\frac{1}{2})x}}{\sin\frac{x}{2}}$ とおくと (5.2.1) より

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)D_N(y)dy$$

である。いま $S_N(1) = 1$ であり、D_N は偶関数なので、

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi D_N(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0 D_N(y)dy = \frac{1}{2} \tag{5.3.1}$$

ここで g を

$$g(y) = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}y}\begin{cases} f(x-y) - f(x+0) & y \in [-\pi, 0] \text{ のとき}, \\ f(x-y) - f(x-0) & y \in (0, \pi] \text{ のとき}. \end{cases}$$

とおけば、(5.3.1) より

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin\Big(N+\frac{1}{2}\Big)y\,dy = S_N(f)(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \quad (5.3.2)$$

ここで

$$\lim_{y\to\pm 0} g(y) = \lim_{y\to\pm 0}\frac{y}{\sin\frac{1}{2}y}\frac{f(x-y)-f(x\mp 0)}{y} = -2f'(x\mp 0).$$

よってある $\delta \in (0,\pi)$ に対して $|g(y)|$ は $|y| \le \delta$ で有界である。さらに $\delta \le |y| \le \pi$ では $|\sin\frac{1}{2}y| \ge \sin\frac{\delta}{2}$ であるから、

$$|g(y)| \le \frac{|f(x-y)|+|f(x\pm 0)|}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

これより $g \in L^2(S^1)$. ここで $h_1(y) = g(y)\cos\frac{1}{2}y, h_2(y) = g(y)\sin\frac{1}{2}y$ とおけば

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin\Big(N+\frac{1}{2}\Big)y\,dy\Big| \\ &\le \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_2(y)\cos Ny\,dy\Big| + \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_1(y)\sin Ny\,dy\Big| \le |F_N(h_1)|+|F_N(h_2)|\end{aligned} \quad (5.3.3)$$

$h_1, h_2 \in L^2(S^1)$ より $\lim_{N\to\infty} F_N(h_i) = 0$ であるので、 (5.3.2) と (5.3.3) より $N\to\infty$ で $S_N(f)(x) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. □

D_N を Dirichlet 核と呼ぶ。

演習 5.3.1. ある $c_3 > 0$ があって任意の $N \ge 1$, 任意の $f \in C^3(S^1)$ に対して、

$$||S_N(f) - f||_\infty \le \frac{c_3||f'''||_1}{N^2}$$

が成立することを示せ。

演習 5.3.2. $k \ge 2$ とする。ある $c_k > 0$ があって任意の $N \ge 1$, 任意の $f \in C^k(S^1)$ に対して、

$$||S_N(f) - f||_\infty \le \frac{c_k||f^{(k)}||_1}{N^{k-1}}$$

が成り立つことを示せ。

演習 5.3.3. $\Omega = \{\mu | \mu$ は S^1 上の Borel 正則な測度, $\mu(S^1) = 1\}$ とする。$\mu \in \Omega, n \in \mathbb{Z}$ に対して $F_n(\mu)$ を次の式で定義する。

$$F_n(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} d\mu$$

(1) $f \in C^1(S^1)$ に対して、次の関係式が成り立つことを示せ。

$$\int_0^{2\pi} f d\mu = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n(f)F_{-n}(\mu)$$

[ヒント：$f_N(x) = \sum_{|n|\le N} F_n(f)e^{inx}$ とするとき、$\int_0^{2\pi} f_N d\mu$ は?]
(2) $\mu, \nu \in \Omega$ とする。任意の $n \in \mathbb{Z}$ で $F_n(\mu) = F_n(\nu)$ ならば任意の Borel 集合 A に対して $\mu(A) = \nu(A)$ であることを示せ。

演習 5.3.4. $C_*(S^1) = \{g | g \in C^0(S^1), \sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_n(g)| < +\infty\}$ とする。
(1) $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$ とする。任意の $g \in C_*(S^1)$ に対して、

$$a\frac{d^2f}{dx^2} + b\frac{df}{dx} + cf = g$$

をみたす $f \in C^2(S^1)$ がただ一つ存在するための必要十分条件は「$-ax^2 + bix + c = 0$ が整数解をもたない。」であることを示せ。
[ヒント：$F_n(af'' + bf' + c) = (-n^2a + ibn + c)F_n(f)$]
(2) $g \in C_*(S^1)$ に対して、

$$\frac{d^2f}{dx^2} + f = g$$

をみたす $f \in C^2(S^1)$ が存在するための必要十分条件は $F_1(g) = 0$ であることを示せ。

§5.4 Gibbs の現象

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\pi - x & x \in [-\pi, 0), \\ \pi - x & x \in (0, \pi], \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

と定義する。このとき、$\Phi(x)$ の Fourier 級数展開は、

$$2\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin nx}{n}$$

である。いま、

$$\Phi_N(x) = S_N(\Phi)(x) = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n}$$

とおくと、定理 5.3.5 により $\Phi_N(x)$ は $\Phi(x)$ に $N \to \infty$ で各点収束する。いま、

$$\Phi_N'(x) = 2\sum_{n=1}^{N} \cos nx = 2\frac{\cos\left(\frac{N+1}{2}x\right)\sin\frac{N}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

これより $x = \pi/(N+1)$ で Φ_N は極大値をとることが分かる。$N \to \infty$ で

$$\Phi_N\Big(\frac{\pi}{N+1}\Big) = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N+1}\frac{N+1}{n}\sin\Big(\frac{n}{N+1}\pi\Big) \to$$

$$2\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{x}dx = 2\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx$$

いま $x \in (0,\pi)$ で $\frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x}{\pi}$ より、

$$\lim_{N\to\infty} \Phi_N\Big(\frac{\pi}{N+1}\Big) = 2\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx > 2\int_0^\pi (1-\frac{x}{\pi})dx = \pi.$$

同様に

$$\lim_{N\to\infty} \Phi_N\Big(\frac{-\pi}{N+1}\Big) = -2\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx < -\pi.$$

定理 5.4.1. $f : S^1 \to \mathbb{C}$ は区分的に C^1 級であり、任意の $x \in S^1$ に対して、

$$f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

が成り立つとする。このとき
(a) 任意の x に対して $\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = f(x)$.
(b) $[a,b]$ 上で f が連続ならば $S_N(f)$ は $[a,b]$ 上 $N \to \infty$ で f に一様収束する。
(c) 任意の x に対して

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)\big(x \pm \frac{\pi}{N+1}\big) = f(x) \pm \frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}G_* \quad \text{（複号同順）}.$$

ただし

$$G_* = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin y}{y}dy > 1.$$

特に $f(x+0) > f(x-0)$ のときは $\lim_{N\to\infty} S_N(f)\big(x + \frac{\pi}{N+1}\big) > f(x+0)$.

(c) の事実を Gibbs の現象 (Gibbs phenomena) という。特に Fourier 級数展開は不連続点を含む区間上では必ず一様収束しない。

補題 5.4.2. $0 < a < b < 2\pi$ とするとき Φ_N は $[a,b]$ 上 Φ に一様収束する。

証明. $g(x) = \dfrac{x}{\sin \frac{x}{2}}$ とおく。$x \in (0, 2\pi)$ とすると $(x-2\pi, x)$ では $\Phi(x-y) = \pi - x + y$ より、

$$
\begin{aligned}
&\Phi_N(x) - \Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\Phi(x-y) - \Phi(x)) D_N(y) dy \\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x} g(y) \sin\Big(N + \frac{1}{2}\Big) y\, dy \\
=&\frac{1}{2\pi}\left(\left[-g(y)\frac{\cos\big(N+\frac{1}{2}\big)y}{N+\frac{1}{2}}\right]_{x-2\pi}^{x} + \int_{x-2\pi}^{x} g'(y)\frac{\cos(N+\frac{1}{2})y}{N+\frac{1}{2}} dy\right) \\
=&\frac{1}{2\pi(N+\frac{1}{2})}\left(-2\pi \frac{\cos(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} + \int_{x-2\pi}^{x} g'(y)\cos(N+\frac{1}{2}) y dy\right)
\end{aligned}
$$

ここで $M = \inf_{y\in[a,b]} \sin\frac{x}{2}, L = \sup_{y\in[a-2\pi,b]} |g'(y)|$ とするとき $M, L \in (0, +\infty)$ であり

$$
|\Phi_N(x) - \Phi(x)| \leq \frac{1}{N+\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{M} + L\Big)
$$

よって $[a,b]$ 上 Φ_N は Φ に $N \to \infty$ で一様収束する。 □

定理 *5.4.1* の証明. f の不連続点の全体を $\{c_1, \dots, c_m\}$, $k = 1, \dots, m$ に対して $A_k = f(c_k+0) - f(c_k-0)$ とおく。ここで

$$
h(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{2\pi}\Phi(x - c_k)
$$

とおくと、h は $h \in C^0(S^1)$ で区分的に C^1 級の関数である。このとき

$$
S_N(f)(x) = S_N(h)(x) + \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{2\pi} S_N(\Phi)(x - c_k)
$$

(a) 定理 5.3.4 及び 5.3.5 により任意の x で $N \to \infty$ のとき $S_N(h)(x) \to h(x), S_N(\Phi)(x) \to \Phi(x)$ より $S_N(f)(x) \to f(x)$.
(b) 定理 5.3.4 より $S_N(h)$ は S^1 上 $N \to \infty$ で h に一様収束。また $[a,b]$ が不

連続点を含まないなら補題 5.4.2 より任意の k に対して $[a,b]$ 上 $S_N(\Phi)(x-c_k)$ は $\Phi(x-c_k)$ に $N\to\infty$ で一様収束する。従って $S_N(f)$ は $[a,b]$ 上 $N\to\infty$ で f に一様収束する。
(c) x で f が連続のとき、x の十分小さな近傍で $S_N(f)$ は f に $N\to\infty$ で一様収束する。よって $\lim_{N\to\infty} S_N(f)\bigl(x\pm\frac{\pi}{N+1}\bigr)=f(x)$. $x=c_k$ のとき、$H_k(x)=h(x)+\sum_{j:j\neq k}\frac{A_j}{2\pi}\Phi(x-c_j)$ とおくと H_k は c_k で連続。(b) より $\lim_{N\to\infty} S_N(H_k)\bigl(c_k\pm\frac{\pi}{N+1}\bigr)=H_k(c_k)=(f(c_k+0)+f(c_k-0))/2$. これより $N\to\infty$ で

$$
\begin{aligned}
S_N(f)\bigl(c_k\pm\frac{\pi}{N+1}\bigr)&=S_N(H_k)\bigl(c_k\pm\frac{\pi}{N+1}\bigr)+\frac{A_k}{2\pi}\Phi_N\bigl(\pm\frac{\pi}{N+1}\bigr)\\
&\to\frac{f(c_k-0)+f(c_k+0)}{2}+\frac{A_k}{2}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin y}{y}dy
\end{aligned}
$$

□

演習 5.4.1. $T^2=S^1\times S^1$ とする。$N\geq 1$ に対して $D_N(x)=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$ とするとき以下の問いに答えよ。
(1) $f\in C^2(T^2)$ に対して、

$$
T_N(f)(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t,y-s)D_N(t)D_N(s)dsdt
$$

とおく。T^2 上 $T_N(f)$ は $N\to\infty$ で f に一様収束することを示せ。
(2) $\psi_{n,m}(x,y)=(2\pi)^{-1}e^{inx+imy}$ とおく。このとき、$(\psi_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(T^2,dxdy)$ の完全正規直交系であることを示せ。

Chapter 6

Fourier 変換

Fourier 級数から Fourier 変換へ

$[-\pi,\pi]$ 上定義された関数に対しては、Fourier 級数による展開があった。例えば $f \in C^1([-\pi,\pi])$ ならば定理 5.4.1 により、$|x| \neq \pi$ では、

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(s) \frac{e^{-ins}}{\sqrt{2\pi}} ds \Big) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \tag{6.0.1}$$

となった。それでは $\mathbb{R}$ 上定義された関数について Fourier 級数にあたるものはなんであろうか？ $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ とする。$g_L(x) = f(Lx)$ とおくとき、$x \in (-\pi,\pi)$ では、(6.0.1) により

$$g_L(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_L(s) e^{-in(s-x)} dx$$

となる。これより $x \in (-L\pi, L\pi)$ では、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi L} \int_{-L\pi}^{L\pi} f(y) e^{-in(y-x)/L} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{L} F_L\big(\frac{n}{L}\big) \end{aligned}$$

ただし、

$$F_L(z) = \int_{-L\pi}^{L\pi} f(y) e^{-iz(y-x)} dy$$

とおいた。いま $L \to \infty$ で $F_L(z) \to F_\infty(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-izy}dye^{-izx}$ である。さらに（証明できるかどうかは後回しにして楽観的に考えると）Riemann 和の類推から、$L \to \infty$ で

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{L}F_L\big(\frac{n}{L}\big) \to \int_{-\infty}^{\infty} F_\infty(z)dx$$

以上より、

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{e^{-izy}}{\sqrt{2\pi}}dy\Big)\frac{e^{izx}}{\sqrt{2\pi}}dz \tag{6.0.2}$$

がなりたつ。この式が Fourier 級数の場合の (6.0.1) にあたるものであると考えられる。両者を見比べるとこの式の dz に関する積分は (6.0.1) での n に関する和に対応している。よって

$$\widehat{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-izy}dy$$

とおくと $\widehat{f}(z)$ は f の “Foureir 級数” に相当する。 この $\widehat{f}$ を f の Fourier 変換とよぶ。(6.0.2) を書き直せば、f はその Fourier 変換 $\widehat{f}$ を用いて

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(z)e^{izx}dz$$

と表されることになる。

この章では以上の議論がどのような f について正当化できるかについて考察する。

§6.1 Convolution

この節以降簡単のため、n-次元 Lebesgue 測度 μ_n に関する積分を $\int f(x)dx$ と書く。正確には、μ_n-可積分関数 f について、$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\mu(x)$ を $\int f(x)dx$ と書く。

定理 6.1.1. $p \in [1, \infty]$ とする。$f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

とおくとき、$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ であり、

$$||f * g||_p \leq ||f||_p||g||_1 \tag{6.1.1}$$

が成り立つ。さらに $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ のときは $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ である。

補題 6.1.2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測とする。このとき $F(x,y) = f(x-y)$ は $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$ として $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2n})$-可測である。

証明. $\mathcal{F} = \{A | A \subseteq \mathbb{R}^n, \chi_A(x-y)$ が $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2n})$-可測 $\}$ とおく。χ_A の値は 0 か 1 なので、$\mathcal{F} = \{A | \{(x,y) | x-y \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2n})\}$ である。A を $\mathbb{R}^n$ の開集合とすると、$\{(x,y) | x-y \in A\}$ は $\mathbb{R}^{2n}$ の開集合なので、$A \in \mathcal{F}$. 従って $\mathbb{R}^n$ の開集合の全体を $\mathcal{O}$ とおくと、$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{F}$ である。一方 $\mathcal{O}$ は乗法族であるので、Dynkin 族定理（定理 1.3.8）により、$\sigma(\mathcal{O}) = \delta(\mathcal{O})$. ここで $\mathcal{F}$ は Dynkin 族であるので、$\delta(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{F}$. $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ より、$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. これより f が $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に関する単関数のときは O. K. 一般の可測関数 f は単関数の各点収束極限で表されるので命題 2.2.4-(3) よりこの場合も O. K. □

（上の証明における $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{F}$ の部分について：重川ノート定理 4.8 において、$\mathcal{A} = \mathcal{O}$ とする。このとき $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ である。定理 4.8 の結論より $\mathcal{O}$ を含む最小の Dynkin 族を $\mathcal{L}$ とすると $\mathcal{L} \supseteq \mathcal{B}$. すなわち $\delta(\mathcal{O}) \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{F}$ で $\mathcal{F}$ は Dynkin 族であるから $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \delta(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{F}$.）

定理 *6.1.1* の証明. $p = \infty$ のときは

$$\int |f(x-y)||g(y)|dy \le ||f||_\infty \int |g(y)|dy$$

より明らか。$1 < p < \infty$ とする。いま

$$\int \left(\int |f(x-y)|^p |g(y)|dx \right) dy = ||f||_p^p ||g||_1 \tag{6.1.2}$$

であるので、Fubini の定理（定理 2.7.2）より $\int |f(x-y)|^p |g(y)|dy$ は $x \in \mathbb{R}^n$ を変数とする関数として a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ で有界であり $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-可測である。とくに $F_x(y) = |f(x-y)||g(y)|^{1/p}$ とおけば a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ で $F_x \in L^p(\mathbb{R}^n)$ である。ここで、Hölder の不等式 (4.2.1) より、q を $1/p + 1/q = 1$ をみたすように選べば、

$$\begin{aligned}\int |f(x-y)||g(y)|dy = \int F_x(y)|g(y)|^{1/q} dy &\le ||F_x||_p ||g||_1^{1/q} \\ &= \left(\int |f(x-y)|^p |g(y)|dy \right)^{1/p} ||g||_1^{1/q}.\end{aligned}$$

これを p 乗して x に関して積分して (6.1.2) を用いれば (6.1.1) が得られる。$p=1$ のときは、(6.1.2) より明らか。以上より (6.1.1) が得られる。さらに以下については、$n\to\infty$ で $x_n\to x$ とする。$(f*g)(x_n)=\int f(x_n-y)g(y)dy$ であり、$|f(x_n-y)g(y)|\le|g(y)|$ が a.e. y で成り立つので Lebesgue の収束定理より $n\to\infty$ で $(f*g)(x_n)\to(f*g)(x)$. よって $f*g\in C(\mathbb{R}^n)$. □

$f*g$ を f と g の convolution（畳み込み）という。
$m=0,1,\ldots,\infty$ に対して

$$C_c^m(\mathbb{R}^n)=\{f|f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}, f \text{ は } C^m \text{ 級かつ台コンパクト}\}$$

とする。特に $m=0$ のとき $C_c^0(\mathbb{R}^n)=C_c(\mathbb{R}^n)$ と書く。

定理 6.1.3. $\varphi:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ は可測かつ可積分であり、$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx=1$ をみたすとする。$t>0$ に対して $\varphi_t(x)=t^{-n}\varphi(x/t)$ と定義する。$p\in[1,\infty)$ とすると、任意の $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して、$||f*\varphi_t||_p\le||f||_p$ であり $t\downarrow 0$ で $||f*\varphi_t-f||_p\to 0$ である。

補題 6.1.4. φ は定理 *6.1.3* と同じ条件をみたすとする。いま $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続であり、$f\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき $\mathbb{R}^n$ 上 $t\downarrow 0$ で $f*\varphi_t$ は f に一様収束する。

証明. $\int\varphi_t(x)dx=1$ に注意すれば

$$f*\varphi_t(x)-f(x)=\int(f(x-y)-f(x))\varphi_t(y)dy$$

f は $\mathbb{R}^n$ 上一様連続であるから任意の $\epsilon>0$ に対してある $\delta>0$ がとれて任意の x,y に対して $|x-y|<\delta$ ならば $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ が成り立つ。これより、

$$|f*\varphi_t(x)-f(x)|\le\epsilon+\int_{|y|\ge\delta}|f(x-y)-f(x)|\varphi_t(y)dy\le\epsilon+2||f||_\infty\int_{|z|\ge\delta/t}\varphi(z)dz$$

$\lim_{t\to 0}\int_{|z|\ge\delta/t}\varphi(z)dz=0$ より t が十分小さいなら $|f*\varphi_t(x)-f(x)|<2\epsilon$.（$t$ の選び方は x によらないことに注意）よって $f*\varphi_t$ は f に一様収束する。 □

定理 *6.1.3* の証明. Step 1: f,φ ともに台コンパクトで f が連続のとき
$r>0$ に対して $D_r(x)=\{y|y\in\mathbb{R}^n,|x-y|\le r\}$ とおく。いま $\operatorname{supp}f\subseteq D_r(0),\operatorname{supp}\varphi\subseteq D_r(0)$ とする。このとき、$\operatorname{supp}\varphi_t=D_{tr}(0)$. よって、$f(x-$

$y)\varphi_t(y) \neq 0$ ならば $y \in D_r(x) \cap D_{tr}(0)$. いま $|x| \geq 2r, 0 < t < 1$ ならば任意の y に関して $f(x-y)\varphi_t(y) = 0$. よって、$0 < t < 1$ のとき $\operatorname{supp} f * \varphi_t \subseteq D_{2r}(0)$. ここで補題 6.1.4 より $f * \varphi_t$ は $D_{2r}(0)$ 上では f に一様収束する。よって $t \downarrow 0$ で

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * \varphi_t(x) - f(x)|^p dx = \int_{D_{2r}(0)} |f * \varphi_t(x) - f(x)|^p dx \to 0.$$

Step 2: 一般の場合
$C_c(\mathbb{R}^n)$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ で稠密であるから任意の $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して、$\{f_n\}_{n\geq 1} \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ で $n \to \infty$ で $||f - f_n||_p \to 0$ となるものがとれる。さらに、φ に対して、$\varphi^n(x) = \varphi(x)\chi_{D_n(0)} / \int_{D_n(0)} \varphi(y)dy$ とおくと、

$$\begin{aligned}||\varphi^n - \varphi||_1 = \int_{|x|>n} \varphi(x)dx + \Big(\frac{1}{\int_{D_n(0)} \varphi(x)dx} - 1\Big) \int_{D_n(0)} \varphi(x)dx \\ = 2\Big(1 - \int_{D_n(0)} \varphi(x)dx\Big).\end{aligned}$$

従って $n \to \infty$ で $||\varphi - \varphi^n||_1 \to 0$ である。ここで、

$$\begin{aligned}
&||f * \varphi_t - f|| \\
\leq &||f * \varphi_t - f_n * \varphi_t||_p + ||f_n * \varphi_t - f_n * (\varphi^n)_t||_p + ||f_n * (\varphi^n)_t - f_n||_p + ||f_n - f||_p \\
\leq &||f - f_n||_p ||\varphi_t||_1 + ||f_n||_p ||\varphi_t - (\varphi^n)_t||_1 + ||f_n * (\varphi^n)_t - f_n||_p + ||f - f_n||_p \\
\leq &2||f - f_n||_p + M||\varphi - \varphi^n||_1 + ||f_n * (\varphi^n)_t - f_n||_p
\end{aligned}$$

ただし $M = \sup_{n\geq 1} ||f_n||_p$. ここで n を十分大きくとれば、$2||f - f_n||_p + M||\varphi - \varphi^n||_1 < \epsilon/2$. 次に Step 1 の結果より n を固定して t を十分小さくとれば $||f_n * (\varphi^n)_t - f_n||_p < \epsilon/2$. したがって t が十分小さければ $||f * \varphi_t - f||_p < \epsilon$. 以上より $t \downarrow 0$ で $||f - f_n||_p \to 0$. □

演習 6.1.1. f, g を $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測な関数で、$f(x-y)g(y)$ が y の関数として可積分であるとする。このとき $f(y)g(x-y)$ も y の関数として可積分であり、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy$$

が成り立つことを示せ。

§6.2 Schwartz 空間

$\mathbb{N}_* = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする。

記号. $n \in \mathbb{N}$ とする。$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}_*)^n$ に対して、

$$x^\alpha = {x_1}^{\alpha_1} {x_2}^{\alpha_2} \cdots {x_n}^{\alpha_n}$$
$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x_1)^{\alpha_1} (\partial x_2)^{\alpha_2} \cdots (\partial x_n)^{\alpha_n}}$$

とおく。ただし $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ である。

とくに $\alpha = (0, \ldots, 0)$ のときは $D^\alpha f = f, x^\alpha = 1$ である。

定義 6.2.1. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする。$\alpha, \beta \in (\mathbb{N}_*)^n, N \in \mathbb{N}_*$ に対して、

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)|$$
$$|f|_N = \sum_{\alpha,\beta \in (\mathbb{N}_*)^n : |\alpha|, |\beta| \le N} |f|_{\alpha,\beta}$$

と定義する。さらに

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{f | f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \text{任意の } \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_*)^n \text{ に対して } |f|_{\alpha,\beta} < +\infty\} \\ &= \{f | f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \text{任意の } N \in \mathbb{N}_* \text{ に対して } |f|_N < +\infty\} \end{aligned}$$

と定義する。$\mathcal{S}$ を Schwartz 空間という。$f \in \mathcal{S}$ を急減少関数 (rapidly decreasing functions) という。

明らかに $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}$.

例 6.2.2. $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$. （演習 6.2.4）

命題 6.2.3. $\mathcal{S}$ は通常の関数の和およびスカラー倍に対してベクトル空間をなし、任意の $N \geq 1$ に対して $|\cdot|_N$ は $\mathcal{S}$ 上の *norm* である。さらに任意の $\alpha \in (\mathbb{N}_*)^n$ および任意の $u \in \mathcal{S}$ に対して $D^\alpha u \in \mathcal{S}$ である。

命題 6.2.4. (1) 任意の $p \in [1, \infty]$ に対して $\mathcal{S} \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$.
(2)

$$C_{PG}^\infty(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \middle| f \in C^\infty, \text{任意の } \alpha \in (\mathbb{N}_*)^n \text{ に対して} \right. \\ \left. \text{ある } N \in \mathbb{N}_* \text{ があって } \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{1 + |x|^N} < \infty \right\}$$

とおくと、$f \in \mathcal{S}, h \in C_{PG}^\infty$ ならば $hf \in \mathcal{S}$ である。

$C^\infty_{PG}(\mathbb{R}^n)$ の PG は polynominal growth（多項式の速さの増大）の略である。$f \in \mathcal{C}^\infty_{PG}(\mathbb{R}^n)$ は「f の任意の階数の微分が $|x| \to \infty$ で高々 polynominal growth である。」ことを意味している。

例 6.2.5. 任意の多項式は $C^\infty_{PG}(\mathbb{R}^n)$ に入る。また $\dfrac{\sin x}{x} \in C^\infty_{PG}(\mathbb{R})$. さらに一般に $P(x), Q(x)$ を複素係数多項式で $P(x) = 0$ は実数解を持たないとし、$R(x)$ を実係数の多項式とするとき、$\dfrac{Q(x)\sin R(x)}{P(x)}, \dfrac{Q(x)\sin x}{xP(x)}, \dfrac{Q(x)\cos R(x)}{P(x)}$ は $C^\infty_{PG}(\mathbb{R})$ の要素である。

命題 6.2.4-(1) は次の補題から導かれる。

補題 6.2.6. $p \in [1, \infty]$ とする。このときある $c_{n,p} > 0$ があって任意の $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して、

$$||u||_p \leq c_{n,p}|u|_{n+1}$$

が成り立つ。

証明. 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、

$$|x|^N \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|\right)^N = \sum_{k=(k_1,\ldots,k_n):|k|=N} \binom{N}{k} |x^k| \tag{6.2.1}$$

（ただし $\dbinom{N}{k} = \dfrac{N!}{(k_1)!\cdots(k_n)!}$ は多項係数）が成り立つ。これより、$u \in \mathcal{S}$ に対して

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^{n+1})|u(x)| \leq |u|_{0,0} + \sum_{k:|k|=n+1}\binom{n+1}{k}|u|_{0,k} \leq c|u|_{n+1}$$

（ただし c は n にのみ依存する定数）よって

$$|u(x)| \leq c\frac{|u|_{n+1}}{1+|x|^{n+1}}$$

いま $(1+|x|^{n+1})^{-1} \in L^p$ なので補題が示される。 □

次の補題は多変数の Leibniz の公式である。

補題 6.2.7. $\alpha=(\alpha_j)_{j=1,\cdots,n},\beta=(\beta_j)_{j=1,\cdots,n}\in(\mathbb{N}_*)^n$ とする。任意の j に対して $\alpha_j\geq\beta_j$ が成り立つとき $\alpha\geq\beta$ とかく。$\alpha\geq\beta$ のとき ${}_\alpha C_\beta=\prod_{j=1}^n {}_{\alpha_j}C_{\beta_j}$ と定義する。$f,g\in C^\infty(\mathbb{R}^n),\alpha\in(\mathbb{N}_*)^n$ に対して

$$D^\alpha(fg)=\sum_{\beta:0\leq\beta\leq\alpha}{}_\alpha C_\beta D^\beta f D^{\alpha-\beta}g \tag{6.2.2}$$

命題 6.2.4-(2) は次の補題より明らかである。

補題 6.2.8. $h\in C^\infty_{PG}(\mathbb{R}^n),N\in\mathbb{N}_*$ とする。このとき $c>0$ と $M\in\mathbb{N}_*$ を任意の $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$|fh|_N\leq c|f|_M$$

が成り立つようにとることができる。

証明. $h\in C^\infty_{PG}(\mathbb{R}^n)$ より γ に対して $c_\gamma>0,N(\gamma)\in\mathbb{N}_*$ があって $|(D^\gamma h)(x)|\leq c_\gamma(1+|x|^{N(\gamma)})$ である。ここで (6.2.1) を用いれば $\alpha,\beta\in(\mathbb{N}_*)^n$ に対して、

$$\begin{aligned}|x^\beta(D^\alpha(fh))(x)|&\leq|x^\beta|\sum_{0\leq\gamma\leq\alpha}{}_\alpha C_\gamma|(D^{\alpha-\gamma}f)(x)(D^\gamma h)(x)|\\&\leq\sum_{0\leq\gamma\leq\alpha}{}_\alpha C_\gamma c_\gamma\Big(|x^\beta|+\sum_{\tau:|\tau|=N(\gamma)}\binom{N(\gamma)}{\tau}|x^{\beta+\tau}|\Big)|(D^{\alpha-\gamma}f)(x)|\end{aligned}$$

$M=N+\max\{N(\gamma)||\gamma|\leq N\}$ とおくと $|\alpha|\leq N,|\beta|\leq N$ ならば

$$\begin{aligned}|fh|_{\alpha,\beta}&\leq\sum_{0\leq\gamma\leq\alpha}{}_\alpha C_\gamma c_\gamma\Big(|f|_{\alpha-\gamma,\beta}+\sum_{\tau:|\tau|=N(\gamma)}\binom{N(\gamma)}{\tau}|f|_{\alpha-\gamma,\beta+\tau}\Big)\\&\leq\left(\sum_{0\leq\gamma\leq\alpha}{}_\alpha C_\gamma c_\gamma(1+n^{N(\gamma)})\right)|f|_M.\end{aligned}$$

□

定理 6.2.9. $p\in[0,\infty]$ とする。任意の $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ と任意の $g\in\mathcal{S}$ に対して $f*g\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ である。さらに任意の $\alpha\in(\mathbb{N}_*)^n$ に対して

$$D^\alpha(f*g)=f*(D^\alpha g)$$

証明. 簡単のため $n=1$ の場合に示す。いま変数変換をおこなえば、

$$(f*g)(x)=\int g(x-y)f(y)dy$$

である。いま

$$\frac{(f*g)(x+h)-(f*g)(x)}{h}=\int\frac{g(x+h-y)-g(x-y)}{h}f(y)dy. \quad (6.2.3)$$

平均値の定理より $|h|\le 1$ ならば、ある $\theta\in(0,1)$ に対して

$$\left|\frac{g(x+h-y)-g(x-y)}{h}\right|=|g'(x+\theta h-y)|\le G(x-y),$$

ただし $G(x)=\sup_{y\in[x-1,x+1]}|g'(y)|$ である。いま $g\in\mathcal{S}$ より、$\sup_{x\in\mathbb{R}}|g'(x)(1+x^2)|\le|g|_2<\infty$. これより

$$H(x)=\sup_{y\in[x-1,x+1]}\frac{1}{1+y^2}=\begin{cases}1 & (|x|\le 1)\\ \frac{1}{1+|x-1|^2} & (x\ge 1)\\ \frac{1}{1+|x+1|^2} & (x\le -1)\end{cases}$$

とおけば $0\le G(x)\le|g|_2H(x)$ となる。以上より、

$$\left|\frac{g(x+h-y)-g(x-y)}{h}f(y)\right|\le|g|_2H(x-y)|f(y)|.$$

さて $q\ge 1$ を $1/p+1/q=1$ となるようにとる。$H\in L^q(\mathbb{R})$ であるので Hölder の不等式より $H(x-y)f(y)$ は y に関して可積分である。Lebesgue の収束定理（定理 2.4.4）により、(6.2.3) で $h\to 0$ とすれば、$(f*g)'(x)=(f*g')(x)$. $g'\in\mathcal{S}$ より同じ議論を繰り返せば $(f*g)''(x)=(f*g'')(x)$. 以下帰納的にこの補題が示される。 □

この定理と定理 6.1.3 を組み合わせれば次の系が得られる。

系 6.2.10. $\varphi\in\mathcal{S}$ であり任意の $x\in\mathbb{R}^n$ に対して $\varphi(x)\ge 0$ かつ $\int\varphi(x)dx=1$ とする。いま $\varphi_t(x)=t^{-n}\varphi(x/t)$ とおく。$p\in[1,\infty)$ ならば任意の $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\lim_{t\downarrow 0}||f*\varphi_t-f||_p=0.$$

さらに任意の $t>0$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して $f*\varphi_t\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ である。

例 6.2.11. 系の条件をみたす φ としては、

$$\frac{1}{\pi^{n/2}}e^{-|x|^2}$$

また、台コンパクトな例として（$n=1$ の場合）

$$k(x)=\begin{cases} c\exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & (|x|<1),\\ 0 & (|x|\geq 1). \end{cases}$$

がある。（演習 6.2.3）（定数 c は $\int k(x)dx=1$ となるように選ぶ。）φ が台コンパクトなとき $\{\varphi_t\}_{t>0}$ を molifier（軟化子）という。

系 6.2.12. $p\in[1,\infty)$ とする。このとき $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ で稠密である。とくに $\mathcal{S}$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ の稠密な部分空間である。

証明. 系 6.2.10 の条件をみたす $\varphi\in\mathcal{S}$ で台コンパクトなものを選ぶ。$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ が台コンパクトならば $f*\varphi_t$ も台コンパクトである。系 6.2.10 より $f*\varphi_t\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ であり、$t\downarrow 0$ で $||f*\varphi_t-f||_p\to 0.$ よって、$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $L_c^p(\mathbb{R}^n)=\{f|f\in L^p(\mathbb{R}^n), f$ は台コンパクト$\}$ で稠密である。いま $L_c^p(\mathbb{R}^n)$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ で稠密より系が示された。 □

演習 6.2.1. (1)　任意の $f\in C_{PG}^\infty(\mathbb{R}^n)$ と任意の $\alpha\in(\mathbb{N}_*)^n$ に対して $D^\alpha f\in C_{PG}^\infty(\mathbb{R}^n)$ を示せ。
(2)　任意の $f,g\in C_{PG}^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して $fg\in C_{PG}^\infty(\mathbb{R}^n)$ を示せ。

演習 6.2.2. $P(x)$ を複素係数の 1 変数多項式とする。$P(x)=0$ が実数解をもたないとき、$1/P(x)\in C_{PG}^\infty(\mathbb{R})$ を示せ。

演習 6.2.3.

$$\psi(x)=\begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) & (|x|\leq 1)\\ 0 & (|x|\geq 1) \end{cases}$$

とすると $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ を示せ。

演習 6.2.4. $f(x)=e^{-x^2}$ とおく。
(1)　任意の多項式 $P(x)$ に対して $\lim_{x\to\infty}P(x)f(x)=0$ を示せ。
(2)　$n\geq 0$ とする。ある多項式 $P_n(x)$ があって、$f^{(n)}(x)=P_n(x)f(x)$ を示せ。ただし $f^{(n)}$ は f の n 階微分である。
(3)　任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、$e^{-|x|^2}\in\mathcal{S}$ を示せ。

演習 6.2.5. (1)　$a > 0$ に対して $f_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ を $f_a(x) = e^{-a|x|^2}$ と定義する。このとき $f_a * f_b$ を求めよ。
(2)　$t > 0$ に対して $k_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ を $k_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4t)}$ と定義する。このとき任意の $t_1, t_2 > 0$ に対して $k_{t_1} * k_{t_2} = k_{t_1+t_2}$ を示せ。
(3)　$p \in [1, \infty)$ とする。任意の $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$、任意の $t > 0$、任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、$u(t, x) = (f * k_t)(x)$ とし、$u_t(x) = u(t, x)$ と定義する。このとき、$u(t, x)$ は任意の $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$ で t に関しては C^1 級、x に関しては C^2 級で

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2}$$

をみたし $t \downarrow 0$ で $||u_t - f||_p \to 0$ となることを示せ。

演習 6.2.6. 次の (1), (2) に対して正しければ証明し、間違っていれば反例をあげよ。
(1)　$f \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{S}$ ならば $f * g \in \mathcal{S}$.
(2)　$f \in C_c(\mathbb{R}), g \in \mathcal{S}$ ならば $f * g \in \mathcal{S}$.

§6.3　Fourier 変換

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ とする。次の積分を考える。

$$(\mathcal{F}_n f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ixy} dy \tag{6.3.1}$$

（ただし、xy は x と y の $\mathbb{R}^n$ での標準的な内積を表す。すなわち、$x = (x_j)_{j=1}^n, y = (y_j)_{j=1}^n$ のとき $xy = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ である。）もちろん (6.3.1) の積分が意味を持つ（$\pm\infty$ も含めて値をもつ）ときにしか、$(\mathcal{F}_n f)(x)$ は定義できない。特に、すべての $x \in \mathbb{R}^n$ で $(\mathcal{F}_n f)(x)$ が意味を持つとき $\mathcal{F}_n f$ を f の Fourier 変換という。混乱がおこらない時には $\mathcal{F}_n$ を $\mathcal{F}$ と書く。また簡単のため $\widehat{f} = \mathcal{F} f$ と書く。$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ で $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ が Borel 可測のときは Fubini の定理により、

$$(\mathcal{F}_n f)(x_1, \ldots, x_n) = (\mathcal{F}_1 f_1)(x_1) \cdots (\mathcal{F}_n f_n)(x_n) \tag{6.3.2}$$

である。

例 6.3.1. $f(x) = e^{-t|x|^2}$ とするとき、

$$(\mathcal{F} f)(x) = \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

である。なぜなら、$e^{-t|x|^2} = e^{-tx_1^2} \cdots e^{-tx_n^2}$ であるから、(6.3.2) より、$n=1$ の場合を示せばよい。いま、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ty^2 - ixy)dy &= e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\sqrt{t}y + \frac{ix}{2\sqrt{t}}\right)^2\right)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(z + \frac{ix}{2\sqrt{t}}\right)^2\right)dz\end{aligned}$$

いま

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(z + \frac{ix}{2\sqrt{t}}\right)^2\right)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}.$$

以上より $n=1$ のときに示された。

$m = 0, 1, \ldots, \infty$ に対して、

$$C_0^m(\mathbb{R}^n) = \{f | f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, f \text{ は } C^m \text{ 級}, \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$$

ただし $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ の厳密な定義は $\lim_{r\to\infty} \sup_{|x|\geq r} |f(x)| = 0$ である。

補題 6.3.2. (1)　$f \in L^1$ ならば $\mathcal{F}f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty$ で $||\mathcal{F}f||_\infty \leq (2\pi)^{-n/2}||f||_1$.
(2)　$f \in C_0^1 \cap L^1$ かつ $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in L^1$ ならば

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = ix_k \mathcal{F}f \tag{6.3.3}$$

(3)　$f \in L^1$ かつ $x_k f \in L^1$ ならば $\mathcal{F}f$ は任意の x で x_k-偏微分可能であり、

$$\mathcal{F}(x_k f) = i\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{F}f \tag{6.3.4}$$

(4)　$f, g \in L^1$ とするとき、

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g \tag{6.3.5}$$

証明. (1) (6.3.1) より任意の $x \in \mathbb{R}^n$ で $|(\mathcal{F}f)(x)| \leq (2\pi)^{-n/2}||f||_1$ は明らか。いま $m \to \infty$ で $x_m \to x$ とする。このとき $f(y)e^{-ix_m y} \to f(y)e^{-ixy}$ であり、$|f(y)e^{-ix_m y}| \leq |f(y)|$. よって Lebesgue の収束定理（定理 2.4.4）を用

いれば $m \to \infty$ で $(\mathcal{F}f)(x_m) \to (\mathcal{F}f)(x)$. 従って $\mathcal{F}f$ は連続である。
(2) $k=1$ として一般性を失わない。$g = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ とおくとき

$$
\begin{aligned}
x_1 \int_{-R}^{R} f(y) e^{-ixy} dy_1 &= i \int_{-R}^{+R} f(y) \frac{\partial e^{-ixy}}{\partial y_1} dy_1 \\
&= i \Big[f(y) e^{-ixy} \Big]_{-R}^{R} - i \int_{-R}^{R} g(y) e^{-ixy} dy_1.
\end{aligned}
$$

$g \in L^1$ かつ $f \in C_0$ であるから、$R \to \infty$ とすると、

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) x_1 e^{-ixy} dy_1 = i \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{\partial e^{-ixy}}{\partial y_1} dy_1 = -i \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-ixy} dy_1
$$

である。これを $y_2, \ldots, y_n$ に関して積分すれば

$$
x_1 \mathcal{F} f = -i \mathcal{F} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big).
$$

(3) $k=1$ として一般性を失わない。$\mathcal{F}f$ を $x_2, \ldots, x_n$ を固定して x_1 の関数と考えたものを $F(x_1)$ と書く。このとき

$$
\frac{F(x_1+h) - F(x_1)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ixy} \frac{e^{-ihy_1} - 1}{h} dy \tag{6.3.6}
$$

任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $|e^{-i\theta} - 1| \leq |\theta|$ であるので、$|f(y)e^{-ixy}(e^{-hy_1} - 1)/h| \leq |y_1 f(y)|$. $x_1 f \in L^1$ であるので Lebesgue の収束定理（定理 2.4.4）により (6.3.6) で $h \to 0$ とすれば、(6.3.4) が得られる。
(4) $f(y)g(y-z)e^{-ixz}$ は $dydz$-可積分であるので Fubini の定理により、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\int f(y) g(z-y) e^{-ixz} dydz \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\int \big(f(y) e^{-ixy} \big) \big(g(z-y) e^{-ix(z-y)} \big) dzdy \\
&= (2\pi)^{n/2} (\mathcal{F}f)(x)(\mathcal{F}g)(x)
\end{aligned}
$$

□

定理 6.3.3. $f \in L^1$ ならば $\mathcal{F}f \in C_0$ で $||\mathcal{F}f||_\infty \leq (2\pi)^{-n/2} ||f||_1$. 特に

$$
\lim_{|x| \to \infty} (\mathcal{F}f)(x) = 0 \tag{6.3.7}
$$

(6.3.7) の事実は Riemann-Lebesgue の補題と呼ばれる。

証明. (6.3.7) 2 つの Step に分けておこなう。
Step 1: $f \in C_c^\infty$ のとき
補題 6.3.2-(2) より $f \in C_c^\infty$ に対して、

$$\mathcal{F}(\Delta f) = -|x|^2 \mathcal{F} f$$

だたし $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}$. 従って、補題 6.3.2-(1) より

$$|(\mathcal{F} f)(x)| \leq (2\pi)^{-n/2} |x|^{-2} ||\Delta f||_1$$

これより (6.3.7) が成立する。
Step 2: 一般の $f \in L^1$ のとき
系 6.2.10 より C_c^∞ は L^1 で稠密であるから、任意の $\epsilon > 0$ に対して $g \in C_c^\infty$ を $||g - f||_1 \leq \epsilon/2$ をみたすように選べる。いま、

$$|(\mathcal{F} f)(x)| \leq |(\mathcal{F} g)(x)| + ||f - g||_1$$

$|x|$ が十分大きいならば、Step 1 より $|(\mathcal{F} g)(x)| < \epsilon/2$. このとき $|(\mathcal{F} f)(x)| < \epsilon$. 以上より (6.3.7) が示された。 □

演習 6.3.1. $\mathbb{R}$ 上定義された次の関数の Fourier 変換を求めよ。
(1) $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$
(2) $f(x) = e^{-t|x|}$ (ただし $t > 0$)
(3) $f(x) = xe^{-tx^2}$ (ただし $t > 0$)

演習 6.3.2. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ と定義する。このとき $(\mathcal{F} f^*)(x) = \overline{(\mathcal{F} f)(x)}$ を示せ。

演習 6.3.3. (1) A を n 次の直交行列とする。このとき、任意の $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\mathcal{F}(f \circ A) = \mathcal{F}(f) \circ A$$

を示せ。
(2) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ が radial であるとはある $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ があって任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(x) = h(|x|)$ が成り立つことである。$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ が radial ならば $\mathcal{F} f$ も radial であることを示せ。

演習 6.3.4. $\varphi(x) = e^{-x^2}$ とし、$\varphi_n(x)$ を φ の n 階導関数とする。さらに $\psi_n(x) = e^{-x^2/2}\varphi_n(x)$ とおく。
(1) $n \geq 0$ で

$$\psi_{n+1}(x) = (\psi_n)'(x) - x\psi_n(x)$$

が成り立つことを示せ。ただし $(\psi_n)'$ は ψ_n の導関数である。
(2) ψ_n の Fourier 変換を f_n とおくとき、$n \geq 0$ で

$$f_{n+1}(x) = ixf_n(x) - i(f_n)'(x)$$

が成り立つことを示せ。
(3) $n \geq 0$ で $f_n(x) = (-i)^n\psi_n(x)$ を示せ。

演習 6.3.5. $R > 0$ とし、$S_R = \{z|z \in \mathbb{C}, |\mathrm{Im}\, z| < R\}$ とおく。いま $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して $f_R(x) = f(x)e^{R|x|}$ とおくと $f_R \in L^1(\mathbb{R})$ が成り立つとする。
(1) $z \in S_R$ に対して $f(y)e^{-izy}$ は y に関して $\mathbb{R}$ 上可積分であることを示せ。さらに $z \in S_R$ に対して

$$\widehat{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-izy}dy$$

とおくとき、$\widehat{f}$ は S_R 上連続であることを示せ。
(2) $a < b$ に対して $\gamma : [a,b] \to S_R$ は連続な閉曲線で区分的に滑らかであるとする。すなわちある $a = x_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ に対して任意の $j = 0, 1, \ldots, n-1$ で $\gamma|_{[}a_j, a_{j+1}]$ は $[a_j, a_{j+1}]$ 上では C^1 級であるとする。このとき、Fubini の定理を用いて、$\int_\gamma \widehat{f}(z)dz = 0$ を示せ。
(3) $\widehat{f}$ は S_R 上正則であることを示せ。

§6.4 逆 Fourier 変換

$\mathcal{F}$ の定義と同様に、$f \in L^1$ に対して、

$$(\mathcal{G}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{ixy}dy$$

と定義する。明らかに $(\mathcal{G}f)(x) = (\mathcal{F}f)(-x)$ である。よって補題 6.3.2 および定理 6.3.3 と同様の証明で次のことが示される。

補題 6.4.1. (1) $f \in L^1$ ならば $\mathcal{G}f \in C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty$ で $||\mathcal{G}f||_\infty \le (2\pi)^{-n/2}||f||_1$.
(2) $f \in C_0^1 \cap L^1$ かつ $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in L^1$ ならば

$$\mathcal{G}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big) = -ix_k\mathcal{G}f \tag{6.4.1}$$

(3) $f \in L^1$ かつ $x_k f \in L^1$ ならば $\mathcal{G}f$ は任意の x で x_k-偏微分可能であり、

$$\mathcal{G}(x_k f) = -i\frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{G}f \tag{6.4.2}$$

(4) $f, g \in L^1$ ならば

$$\mathcal{G}(f * g) = (2\pi)^{n/2}\mathcal{G}f \cdot \mathcal{G}g \tag{6.4.3}$$

定理 6.4.2. $f \in L^1$ かつ $\mathcal{F}f \in L^1$ ならば $f \in C_0$ であり、任意の $x \in \mathbb{R}^n$ で $(\mathcal{G}(\mathcal{F}f))(x) = f(x)$ かつ $(\mathcal{F}(\mathcal{G}f))(x) = f(x)$ が成り立つ。

注意. 定理 6.4.2 は厳密には「$f \in \mathcal{L}^1$ かつ $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$ ならば、$f_* = \mathcal{G}(\mathcal{F}f)$ とおくとき、$f_* \in C_0$ であり、$f_*(x) = f(x)$ が a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ で成り立つ。さらに任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $(\mathcal{G}(\mathcal{F}f_*))(x) = f_*(x)$ かつ $(\mathcal{F}(\mathcal{G}f_*))(x) = f_*(x)$」という意味である。

定理 6.4.2 より $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ は互いに逆写像の関係になっていることがわかる。この意味で $\mathcal{G}$ を逆 Fourier 変換と呼び $\mathcal{F}^{-1}$ と書く。

定理 *6.4.2* の証明. いま $t > 0$ に対して

$$f_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\int f(z)e^{-iyz}e^{ixy}e^{-t|y|^2}dydz \tag{6.4.4}$$

とおく。(6.4.4) の右辺の積分の被積分関数の絶対値は $|f(z)|e^{-t|y|^2}$ でありこれは $dydz$-可積分であるので、$\widehat{f} = \mathcal{F}f$ とおくと Fubini の定理より

$$f_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int \widehat{f}(y)e^{ixy}e^{-t|y|^2}dy$$

ここで $|\widehat{f}(y)e^{ixy}e^{-t|y|^2}| \le |\widehat{f}(y)|$ であり $\widehat{f} \in L^1$. 従って Lebesgue の収束定理（定理 2.4.4）により任意の $x \in \mathbb{R}^n$ で

$$\lim_{t\to 0} f_t(x) = (\mathcal{G}(\mathcal{F}f))(x). \tag{6.4.5}$$

一方 $g(x)=e^{-t|x|^2}, k_t(x)=(4\pi t)^{-n/2}e^{-|x|^2/(4t)}$ とおくと (6.4.4) に Fubini の定理と例 6.3.1 を用いて

$$f_t(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int f(z)\widehat{g}(z-x)dz=\int f(z)k_t(x-z)dz=(f*k_t)(x)$$

いま $\varphi(x)=(\pi)^{-n/2}e^{-|x|^2}$, $\varphi_s(x)=s^{-n}\varphi(x/s)$ とおくとき、$k_t(x)=\varphi_{2\sqrt{t}}$ である。例 6.2.11 により φ は 系 6.2.10 の条件をみたす。従って系 6.2.10 により、$f_t=f*k_t$ は $t\downarrow 0$ で f に L^1 の意味で収束する。補題 4.2.8 により f_t の部分列は f に a.e. $x\in\mathbb{R}^n$ で各点収束する。これと (6.4.5) により a.e. $x\in\mathbb{R}^n$ で $(\mathcal{G}(\mathcal{F}f))(x)=f(x)$. いま $(\mathcal{G}(\mathcal{F}f))\in C_0$ より、$f\in C_0$ と考えてよい。$(\mathcal{F}(\mathcal{G}f))=f$ についても同様に示される。 □

系 6.4.3. *$f,g\in L^1$ かつ $\mathcal{F}f,\mathcal{F}g\in L^1$ とする。このとき、$\mathcal{F}(f\cdot g)=(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}f*\mathcal{F}g$ かつ $\mathcal{G}(f\cdot g)=(2\pi)^{-n/2}\mathcal{G}f*\mathcal{G}g$.*

注意. $f,g\in L^1$ かつ $\mathcal{F}f,\mathcal{F}g\in L^1$ ならば定理 6.4.2 より $f\in C_0\subset L^\infty$. 従って $f\cdot g\in L^1$.

証明. $\widehat{f},\widehat{g}\in L^1$ より補題 6.4.1-(4), 定理 6.4.2 より、$\mathcal{G}(\widehat{f}*\widehat{g})=(2\pi)^{n/2}f\cdot g$. いま $f\cdot g\in L^1$ であるから、再び定理 6.4.2 より $\widehat{f}*\widehat{g}=\mathcal{F}(\mathcal{G}(\widehat{f}*\widehat{g}))=(2\pi)^{n/2}\mathcal{F}(f\cdot g)$. □

系 6.4.4. *$f,g\in L^1$ かつ $\mathcal{F}f,\mathcal{F}g,\mathcal{F}f\cdot\mathcal{F}g\in L^1$ ならば、*

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(-x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{F}f)(x)(\mathcal{F}g)(x)dx. \tag{6.4.6}$$

とくに、

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{F}f)(x)\overline{(\mathcal{F}g)(x)}dx. \tag{6.4.7}$$

証明. $\mathcal{F}f\cdot\mathcal{F}g\in L^1$ なので (6.3.5) より $\mathcal{F}(f*g)\in L^1$. 定理 6.4.2 により、

$$f*g=\mathcal{G}(\mathcal{F}(f*g))=\mathcal{G}((2\pi)^{n/2}\mathcal{F}f\cdot\mathcal{F}g)$$

（上の等号は厳密には a.e. x でのみ成り立つことに注意）また定理 6.4.2 より $f\in C_0$ なので、$f*g$ は連続である。よって上の式の等号は任意の x で成り立ち、 $x=0$ を代入すれば (6.4.6) が得られる。いま $g^*(x)=\overline{g(-x)}$ とおくと $\mathcal{F}(g^*)=\overline{\mathcal{F}g}$. よって (6.4.6) で g の代わりに g^* を代入すれば (6.4.7) が得られる。 □

§6.5　Schwartz 空間上での Fourier 変換

補題 6.5.1. $f \in \mathcal{S}$, $\alpha, \beta \in (\mathbb{N}_*)^n$ とするとき、

$$x^\beta D^\alpha(\mathcal{F}f) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|}\mathcal{F}(D^\beta(x^\alpha f))$$
$$x^\beta D^\alpha(\mathcal{G}f) = i^{|\alpha|+|\beta|}\mathcal{G}(D^\beta(x^\alpha f))$$

証明. $f \in \mathcal{S}$ ならば任意の $\alpha, \beta \in (\mathbb{N}_*)^n$ に対して $x^\alpha f \in \mathcal{S}, D^\beta f \in \mathcal{S}$. よって補題 6.3.2 および 6.4.1 を用いれば明らか。 □

定理 6.5.2. $\mathcal{F}$ および $\mathcal{G}$ は $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ の全単射であり、$\mathcal{G}\circ\mathcal{F} = \mathcal{F}\circ\mathcal{G} = \mathrm{I}_\mathcal{S}$. ただし $\mathrm{I}_\mathcal{S}$ は $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への恒等写像である。さらに $(\cdot,\cdot)$ を L^2 の内積とするとき、任意の $f, g \in \mathcal{S}$ に対して $(f,g) = (\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)$ が成り立つ。

証明. $f \in \mathcal{S}$ とする。$\alpha, \beta \in (\mathbb{N}_*)^n$ に対して $D^\beta(x^\alpha f) \in \mathcal{S} \subseteq L^1$ である。補題 6.5.1 および定理 6.3.3 より $x^\beta D^\alpha(\mathcal{F}f) \in C_0$. 従って、$|\mathcal{F}f|_{\alpha,\beta} < +\infty$. よって $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}$ が成り立つ。同様に $\mathcal{G}f \in \mathcal{S}$. 従って $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}, \mathcal{G}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$. 定理 6.4.2 により $\mathcal{G}\circ\mathcal{F} = \mathcal{F}\circ\mathcal{G} = I_\mathcal{S}$. とくに $\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への全単射である。$f, g \in \mathcal{S}$ のとき、$\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g \in L^1$. 従って (6.4.7) より $(f,g) = (\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)$. □

定理 6.5.3. $\mathcal{F}|_\mathcal{S}$ は L^2 から L^2 への内積を保つ線形な全単射（*i.e. Unitary map*）に一意的に拡張できる。その拡張を $\widetilde{\mathcal{F}}$ とするとき、$f \in L^1 \cap L^2$ ならば $\mathcal{F}f = \widetilde{\mathcal{F}}f$ である。とくに $f \in L^1 \cap L^2$ ならば $\mathcal{F}f \in L^2$ であり、

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |(\mathcal{F}f)(x)|^2 dx \tag{6.5.1}$$

(6.5.1) を Plancherel の公式という。

以後混乱を生じないときは $\widetilde{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F}$ と書き、L^2 上の Fourier 変換という。さらにこの意味での $\mathcal{F}$ の逆写像を $\mathcal{F}^{-1}$ と書き、L^2 上の逆 Fourier 変換という。

証明. $\mathcal{F}$ が L^2 から L^2 への内積を保つ線形写像に拡張できることは、定理 6.5.2 と定理 4.1.9 より明らか。同様に $\mathcal{G}$ も L^2 から L^2 への内積を保つ線形写像に拡張され、その拡張が $\widetilde{\mathcal{F}}$ の逆を与えることも明らかなので、$\widetilde{\mathcal{F}}$ が全単射である。

$f \in L^1 \cap L^2$ とする。$r > 0$ に対して $f_r = f \cdot \chi_{B_r(x)}$ とする。このとき $n \geq 1$ に対して r が十分大きいならば $||f - f_r||_1 < 1/n, ||f - f_r||_2 < 1/n$ である。さらに系 6.2.10 で φ として台コンパクトなものを選んでおくと $f_r * \varphi_s \in C_c^\infty$ であり $s \downarrow 0$ で $||f_r - f_r * \varphi_s||_1 \to 0$ かつ $||f_r - f_r * \varphi_s||_2 \to 0$. 従って、

$g_n \in C_c^\infty$ で $||f_r - g_n||_1 \leq 1/n$ かつ $||f_r - g_n||_2 \leq 1/n$ となるものがとれる。以上より、$\{g_n\}_{n\geq 1} \subseteq C_c^\infty$ で $\lim_{n\to\infty} ||f - g_n||_1 = \lim_{n\to\infty} ||f - g_n||_2 = 0$ となるものがある。いま、補題 6.3.2-(1) により、$||\mathcal{F}f - \mathcal{F}g_n||_\infty \leq ||f - g_n||_1$. 従って $\mathcal{F}g_n$ は $n \to \infty$ で $\mathcal{F}f$ に一様収束する。一方 $\mathcal{F}g_n$ は $\widetilde{\mathcal{F}}f$ に L^2 で収束する。補題 4.2.8 より $\mathcal{F}g_n$ の部分列で $\widetilde{\mathcal{F}}f$ に a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ で各点収束するものがとれる。いま 任意の x で $n \to \infty$ のとき $(\mathcal{F}g_n)(x) \to (\mathcal{F}f)(x)$ であるから $(\widetilde{\mathcal{F}}f)(x) = (\mathcal{F}f)(x)$ が a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ で成立する。従って L^2 の要素として $\mathcal{F}f = \widetilde{\mathcal{F}}f$. □

演習 6.5.1. 任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $(\mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F})f = f$ を示せ。

演習 6.5.2. f は $\mathbb{R}$ 上定義された実数値関数で $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とする。
(1)

$$\int_{\mathbb{R}} xf'(x)f(x)dx = -\frac{1}{2}||f||_2^2$$

を示せ。
(2) f の Fourier 変換を $\widehat{f}$ とおくとき、

$$\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2dx \int_{\mathbb{R}} x^2|\widehat{f}(x)|^2dx \geq \frac{1}{4}||f||_2^4$$

が成り立つことを示せ。
[ヒント：(2) $x\widehat{f}(x)$ の逆 Fourier 変換は？ 一般に $(g, g)_2 = (\mathcal{F}g, \mathcal{F}g)_2$.]

§6.6 Fourier 変換と微分方程式

$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in (\mathbb{N}_*)^n$ に対して

$$\sum_{j=1}^m a_j D^{\alpha_j} u = f$$

が成り立つとき、両辺を Fourier 変換すると、

$$P(x)\widehat{u}(x) = \widehat{f}(x),$$

（ただし $P(x) = a_1 i^{|\alpha_1|} x^{a_1} + \ldots + a_m i^{|\alpha_m|} x^{\alpha_m}$）と書ける。従って、$Q = \mathcal{F}^{-1}(1/P)$ とおくと

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2}(Q * f)(x)$$

が成り立つはずである。とりあえず $n=1$ のときいくつかの例についてこの議論を検証する。

A. Laplacian の場合

$f\in\mathcal{S}$ とする。$\Delta=d^2/dx^2$ と定義する。すなわち $u\in C^2$ に対して $(\Delta u)(x)=u''(x)$ である。いま $f\in\mathcal{S}$ に対して、

$$\Delta u=f$$

をみたす u を考える。Fourier 変換により

$$-x^2(\mathcal{F}u)(x)=(\mathcal{F}f)(x)$$

となるが、x^{-2} は（逆）Fourier 変換ができないので上の方法では解けない。代わりに $\lambda>0$ に対して、

$$-\Delta u+\lambda u=f \tag{6.6.1}$$

を考える。$f\in\mathcal{S}$ としておく。Fourier 変換により

$$(\lambda+x^2)(\mathcal{F}u)(x)=(\mathcal{F}f)(x)$$

命題 6.2.4-(2) より $(\lambda+x^2)^{-1}\mathcal{F}f\in\mathcal{S}$ である。ここで $\mathcal{F}^{-1}(\lambda+x^2)^{-1}=\sqrt{\pi/(2\lambda)}e^{-\sqrt{\lambda}|x|}\in L^1$ より、$g_\lambda(x)=(2\sqrt{\lambda})^{-1}e^{-\sqrt{\lambda}|x|}$ とおけば、

$$u(x)=(g_\lambda*f)(x)=\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}f(y)dy \tag{6.6.2}$$

となる。以上をまとめると、

定理 6.6.1. あたえられた $f\in\mathcal{S}$ に対して微分方程式 (6.6.1) をみたす u で $u\in\mathcal{S}$ となるものがただ一つ存在し、(6.6.2) で与えられる。

いま $\lambda>0$ に対して $G_\lambda f=f*g_\lambda$ と定義する。$p\in[1,\infty)$ に対して $||f*g_\lambda||_p\leq||g_\lambda||_1||f||_p=\lambda^{-1}||f||_p$ より $G_\lambda:L^p\to L^p$ は

$$||G_\lambda f||_p\leq\frac{1}{\lambda}||f||_p$$

をみたす有界線型作用素である。ここで $G_\lambda=(\lambda-\Delta)^{-1}$ となっている。$\{G_\lambda\}_{\lambda>0}$ は Δ の resolevent、g_λ は Δ の λ-Green 関数とよばれる。

B. 熱（拡散）方程式

$u : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ 上で C^∞ 級とする。さらに $t \geq 0$ に対して $u_t(x) = u(t, x)$ とおくとき、任意の $t \geq 0$ で $u_t \in \mathcal{S}$ とする。いま u が熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.6.3}$$

を任意の $t > 0, x \in \mathbb{R}$ で満たすとする。(6.6.3) を x に関して Fourier 変換すると、

$$(\mathcal{F}(\frac{\partial u}{\partial t}))(x) = (\mathcal{F}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}))(x) = -x^2(\mathcal{F}u)(x)$$

$\mathcal{F}$ と $\partial/\partial t$ が交換可能であると仮定し $U(t, x) = (\mathcal{F}u)(t, x)$ とおけば

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, x) = -x^2 U(t, x).$$

これを解いて

$$U(t, x) = e^{-tx^2} U(0, x) = e^{-tx^2}(\mathcal{F}u_0)(x)$$

となる。$e^{-tx^2} \in \mathcal{S}$ より逆 Fourier 変換をおこなえば、

$$u(t, x) = (u_0 * k_t)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy$$

（$k_t(x)$ は定理 6.4.2 の証明で与えたもの）

C. 波動方程式

$u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ 上で C^∞ 級であり、$f, g \in \mathcal{S}$ に対して、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{6.6.4}$$

$$u(0, x) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x)$$

をみたすとする。(6.6.4) を波動方程式という。いま (6.6.4) を x に関して Fourier 変換し、$\mathcal{F}$ と $\partial^2/\partial t^2$ が交換可能であると仮定すれば

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}u}{\partial t^2}(t, x) = -x^2(\mathcal{F}u)(t, x)$$

$U(t,x) = (\mathcal{F}u)(t,x)$ とおいてこの t に関する常微分方程式を解けば、

$$U(t,x) = \widehat{f}(x)\cos xt + \widehat{g}(x)\frac{\sin xt}{x}$$

$\cos xt, \sin xt/x$ は可積分ではないので、ともに（逆）Fourier 変換可能ではないがとりあえず考察を続ける。いま δ_a を $a \in \mathbb{R}$ に重みをもつ δ-関数とする。数学的には δ_a は $\mathbb{R}$ 上の Borel 測度で、$\delta_a(A) = \chi_A(a)$ をみたすのものである。さて、

$$(\mathcal{F}(\delta_t + \delta_{-t}))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-ixy}(d\delta_t(y) + d\delta_{-t}(y)) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cos xt$$

$$(\mathcal{F}\chi_{[-t,t]})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t}^{t} e^{-ixy}dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin xt}{x}$$

従って

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}(\cos xt) = \frac{\delta_t + \delta_{-t}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}(\sin xt/x) = \frac{1}{2}\chi_{[-t,t]}$$

これより、

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (f * (\frac{\delta_t + \delta_{-t}}{2}))(x) + \frac{1}{2}(g * \chi_{[-t,t]})(x) \\ &= \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} g(x+s)ds. \end{aligned}$$

以上の議論を正当化するためには超関数の理論が必要になる。

演習 6.6.1. (1)　$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ と $\lambda > 0$ に対して、

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx} + \lambda u = f$$

をみたす $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ がただ一つ存在し、ある $g_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ に対して、

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(x-y)f(y)dy$$

と表されることを示せ。

(2)　(1) の g_λ を用いて、$G_\lambda : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を $G_\lambda f = g_\lambda * f$ で定義する。

この G_λ は任意の $p \in [1, \infty)$ に対して $L^p(\mathbb{R})$ からそれ自身への有界線型作用素に拡張でき、

$$||G_\lambda f||_p \leq \frac{1}{\lambda}||f||_p$$

が成り立つことを示せ。

Chapter 7

超関数

§7.1 Tempered distributions

定義 7.1.1. 線型写像 $f:\mathcal{S}\to\mathbb{C}$ に対してある $N\geq 1$ とある $c>0$ があって任意の $u\in\mathcal{S}$ に対して

$$|f(u)|\leq c|u|_N \tag{7.1.1}$$

が成り立つとき、f を tempered distribution（緩増大な超関数）という。tempered distribution の全体を $\mathcal{S}'$ で表す。

$f\in\mathcal{S}', u\in\mathcal{S}$ に対して $f(u)$ を $\langle f,u\rangle$ と表す。

命題 7.1.2. $\mathcal{S}'$ は $\mathbb{C}$-ベクトル空間である。

定理 7.1.3.

$$L^1_{PG}=\{f|f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}, \text{ある } g\in L^1 \text{ とある } N\in\mathbb{N}_* \text{ に対して}$$
$$f(x)=(1+|x|^N)g(x) \text{ が任意の } x\in\mathbb{R}^n \text{ で成立}\}/\sim$$

と定義する。ただし $\sim$ は「$f\sim g\Leftrightarrow$ *a.e.* $x\in\mathbb{R}^n$ で $f(x)=g(x)$」で定義される同値関係である。

(1) $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $\phi_f(u)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)u(x)dx$ と定義するとき $\phi_f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ である。さらに $f,g\in L^1_{PG}$ に対して *tempered distribution* として $\phi_f=\phi_g$ ならば $f=g$ である。

(2)

$$L^1_{PG}=\{f|f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}, f \text{ は可測でありある } N\in\mathbb{N}_*, c>0 \text{ に対して}$$
$$\int_{B_r(0)}|f(x)|dx\leq c(1+r^N) \text{ が任意の } r\geq 0 \text{ で成立する。}\}/\sim$$

(3) $f:\mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ を可測とする。任意の $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して fu は $\mathbb{R}^n$ 上可積分であり $\phi_f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)dx$ と定義するとき $\phi_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ となるための必要十分条件は $f \in L^1_{PG}$ である。

L^1_{PG} の PG は polynominal growth の略である。L^1_{PG} がベクトル空間となることは明らかである。

上の定理より $f \in L^1_{PG}$ に $\phi_f \in \mathcal{S}$ を対応させる写像は単射であることがわかる。以後、この意味で L^1_{PG} を $\mathcal{S}'$ の部分集合と考え、ϕ_f を f と同一視する。次の命題によって C^∞_{PG} も $\mathcal{S}'$ の部分集合と同一視できることがわかる。

命題 7.1.4. $C^\infty_{PG}(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{PG}$.

証明. $f \in C^\infty_{PG}$ とするときある $N \in \mathbb{N}_*$ に対して $\sup_x |f(x)|/(1+|x|^N) < +\infty$. 従って、$f(x)/(1+|x|^N)(1+|x|^{n+1})$ は可積分。十分大きな $c>0$ に対して、$(1+|x|^N)(1+|x|^{n+1}) \le c(1+|x|^{N+n+1})$ であるから $f(x)/(1+|x|^{n+N+1})$ は可積分。よって $f \in L^1_{PG}$. □

定理 7.1.3 の証明のためいくつか補題を用意する。

補題 7.1.5. 任意の $0 \le r < R < \infty$ に対して、$\psi \in C^\infty_c$ で $|x| \le r$ ならば $\psi(x) = 1$, $|x| \ge R$ ならば $\psi(x) = 0$, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ で $0 \le \psi(x) \le 1$ かつ $\psi(x) = \psi(|x|)$ を満たすものが存在する。

定理 *7.1.3-(1)* の証明. $f \in L^1_{PG}$ で $h(x) = f(x)/(1+|x|^N)$ とおくとき $g \in L^1$ とする。$u \in \mathcal{S}$ に対して、$u_N(x) = |x|^N u(x)$ とおくと Hölder の不等式より

$$|\phi_f(u)| \le \int |h(x)|(1+|x|^N)|u(x)|dx \le ||h||_1(||u||_\infty + ||u_N||_\infty)$$
$$\le c||h||_1|u|_N$$

ただし $c>0$ は u によらない定数である。従って $\phi_f \in \mathcal{S}'$.

$f,g \in L^1_{PG}$ で $\phi_f = \phi_g$ とする。$f,g \in L^1$ のときをまず考える。系 6.2.10 の φ_s をとり、$x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\varphi_{s,x}(y) = \varphi_s(x-y)$ と定義する。$\varphi_{s,x} \in \mathcal{S}$ なので $(f*\varphi_s)(x) = \phi_f(\varphi_{s,x}) = \phi_g(\varphi_{s,x}) = (g*\varphi_s)(x)$. 従って $f*\varphi_s = g*\varphi_s$. $h_n = f*\varphi_{1/n}$ とおけば系 6.2.10 より $\lim_{n\to\infty} ||f-h_n||_1 = \lim_{n\to\infty} ||g-h_n||_1 = 0$. 補題 4.2.8 により $\{h_{n_j}\}_{j\ge 1}$ で a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\lim_{j\to\infty} h_{n_j}(x) = f(x) = g(x)$ となるものがとれる。よって a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ で $f(x) = g(x)$.

つぎに一般の場合を考える。補題 7.1.5 で $r = N, R = 2N$ としたものを ψ_N とし $f_N = f\psi_N, g_N = g\psi_N$ とする。このとき $f_N, g_N \in L^1$ である。いま $\phi_{f_N}(u) = \phi_f(\psi_N u) = \phi_g(\psi_N u) = \phi_{g_N}(u)$. よって上の議論から $f_N(x) = g_N(x)$

が a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ で成立する。$|x| \le N$ では $f_N(x) = f(x), g_N(x) = g(x)$ であるので a. e. $x \in B_N(0)$ で $f(x) = g(x)$. N は任意なので a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ で $f(x) = g(x)$. □

定理 7.1.3 の残りの部分の証明のため

$$\mathcal{L}_{PG} = \{f | f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, f \text{ は可測でありある } N \in \mathbb{N}_*, c > 0 \text{ に対して}$$
$$\int_{B_r(0)} |f(x)| dx \le c(1 + r^N) \text{ が任意の } r \ge 0 \text{ で成立する。}\}$$

とおく。

補題 7.1.6. $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ は可測とする。任意の $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して fu は $\mathbb{R}^n$ 上可積分であり $\phi_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき $f \in \mathcal{L}_{PG}$ である。

証明. 簡単のため $n = 1$ の場合で証明する。補題 7.1.5 の ψ で $r = 0, R = 1$ としたものを選ぶ。ここで $a \ge 0$ に対して

$$\psi_a(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \le a) \\ \psi\bigl(|x| - a\bigr) & (|x| \ge a) \end{cases}$$

とおくとき $\psi_a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. いま

$$\psi_a^{(m)}(x) = \begin{cases} 0 & (|x| \le a, |x| \ge a + 1) \\ \psi^{(m)}(|x| - a) & (a \le |x| \le a + 1) \end{cases}$$

従って、$0 \le m, k \le M$ ならば

$$|\psi_a|_{m,k} = \sup_{a \le |x| \le a+1} |x|^k |\psi_a^{(m)}(x)| = \sup_{|y| \le 1} (|y| + a)^k |\psi^{(m)}(y)| \le (1 + a^k)|\psi|_M$$

これより

$$|\psi_a|_M \le c_M(1 + a^M)|\psi|_M.$$

いま $\phi_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ なのである $N \in \mathbb{N}_*, c > 0$ があって、$|\phi_f(u)| \le c|u|_N$. $f(x) \ge 0, \psi_a(x) \ge 0$ より、

$$\int_{-a}^{a} f(x) dx \le \int f(x)\psi_a(x) dx \le c|\psi_a|_N \le c c_N(1 + a^N)|\psi|_N$$

が成立する。よって $f \in \mathcal{L}_{PG}$. □

定理 7.1.3-(2), (3) の証明. (2)　$f \in L^1_{PG}$ とするとき $|f| \in L^1_{PG}$. $|f|$ に補題 7.1.6 を使えば $f \in \mathcal{L}^1_{PG}$. 逆に $\int_{B_r(0)} |f(x)|dx \le c(1+r^N)$ とする。このとき Hölder の不等式により

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{1+|x|^{N+2}} \chi_{B_m(0)} dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{k \le |x| \le k+1} \frac{|f(x)|}{1+|x|^{N+2}} dx$$

$$\le \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{1+k^{N+2}} \int_{k \le |x| \le k+1} |f(x)|dx \le c \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1+(k+1)^N}{1+k^{N+2}}$$

いまある $c_1 > 0$ に対して $k \ge 1$ では $(1+(k+1)^N)/(1+k^{N+2}) \le c_1/k^2$ であるので、上の式の最後の和は $m \to \infty$ で収束する。単調収束定理より $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|/(1+|x|^{N+2})dx < \infty$. よって $f \in L^1_{PG}$.
(3)　補題 7.1.6 より $\phi_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ならば $f \in \mathcal{L}_{PG} = L^1_{PG}$. 逆に (1) より $f \in L^1_{PG}$ ならば $\phi_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. □

命題 7.1.7. μ を $\mathbb{R}^n$ 上の *Borel* 正則な測度で、ある $N \in \mathbb{N}$ に対して、$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^N)^{-1} d\mu < +\infty$ とする。このとき、$u \in \mathcal{S}$ に対して、$\phi_\mu(u) = \int_{\mathbb{R}^n} u d\mu$ と定義すれば $\phi_\mu \in \mathcal{S}'$ である。

証明. $\phi_\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ で線型であることは明らか。いま、$f \in \mathcal{S}$ に対して

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^N)|f(x)| \le c|f|_N$$

（ただし c は f によらない定数）これより、

$$|\phi_\mu(u)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^N) u(x) (1+|x|^N)^{-1} d\mu \right| \le c|u|_N \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^N)^{-1} d\mu.$$

□

$a \in \mathbb{R}^n$ に対して δ_a を a に重みを持つ Dirac の δ-関数（測度）とすると、$\phi_{\delta_a}(u) = u(a)$ となる。δ_a と ϕ_{δ_a} を同一視して $\delta_a(u) = u(a)$ と考える。

演習 7.1.1. 可測関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ および $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $\phi_f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)dx$ とおく。
(1)　a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ で $f(x) \ge 0$ であり任意の $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して fu が $\mathbb{R}^n$ 上可積分であり $\phi_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする。可測関数 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ が a. e. $x \in \mathbb{R}^n$ で $|g(x)| \le |f(x)|$ をみたすなら、$\phi_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ を示せ。
(2)　P を n 変数の複素係数多項式とする。 $\phi_P \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ を示せ。

演習 7.1.2. (1)　$a > 0$ とする。$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して、

$$F_a(u) = \int_{-\infty}^{-a} \frac{u(x)}{x} dx + \int_{a}^{+\infty} \frac{u(x)}{x} dx + \int_{-a}^{a} \frac{u(x) - u(0)}{x} dx$$

とおくと $F \in \mathcal{S}'$ であることを示せ。
(2)　(1) で定義した F_a は a によらないことを示せ。さらに任意の $u \in \mathcal{S}$ に対して、次の式が成立することを示せ。

$$F_a(u) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \Big(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{u(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{u(x)}{x} dx \Big)$$

演習 7.1.3. γ を $\mathbb{R}^2$ 内の C^1 級の Jordan 閉曲線、D を γ に囲まれる領域とする。$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ に対して $\ell_{\gamma,i}(u) = \int_\gamma u dx_i, (i = 1, 2)$ とおく。$\ell_{\gamma,i} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ を示せ。さらに $\frac{\partial}{\partial x_1} \chi_D = -\ell_{\gamma,2}, \frac{\partial}{\partial x_2} \chi_D = \ell_{\gamma.1}$ であることを示せ。

演習 7.1.4. (1)　$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), N \in \mathbb{N}_*, \epsilon > 0$ に対して、$U(f, N, \epsilon) = \{u | u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), |f - u|_N < \epsilon\}$ としさらに

$$\begin{aligned}\mathcal{O} = \{O | O \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), &\text{任意の } f \in O \text{ に対して} \\ &\text{ある } N \in \mathbb{N}_*, \epsilon > 0 \text{ があって } U(f, N, \epsilon) \subseteq O\}\end{aligned}$$

と定義する。$\mathcal{O}$ は $\mathcal{S}$ の位相を与えることを示せ。
(2)　$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) = \{f | f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, f$ は位相 $\mathcal{O}$ に関して連続な線形写像 $\}$ を示せ。
(3)　$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して、

$$d(f, g) = \sum_{N \in \mathbb{R}_*} \frac{1}{2^N} \frac{|f - g|_N}{1 + |f - g|_N}$$

と定義すると d は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の距離となることを示せ。さらに d で与えられる位相は $\mathcal{O}$ と一致することを示せ。
(4)　$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d)$ は完備であることを示せ。

§7.2　超関数の演算

$f \in C_c^\infty$ とするとき任意の $u \in \mathcal{S}$ に対して部分積分によって、

$$\phi_{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_k} u dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial u}{\partial x_k} dx = -\phi_f \Big(\frac{\partial u}{\partial x_k} \Big).$$

この事実から、$f \in \mathcal{S}'$ に対して、$f_k(u) = -f(\frac{\partial u}{\partial x_k})$ をみたす超関数 f_k が f の "x_k-偏微分" に相当するものであると考えることができる。

命題 7.2.1. $f \in \mathcal{S}'$ とする。$u \in \mathcal{S}$ に対して

$$\frac{\tilde{\partial} f}{\tilde{\partial} x_k}(u) = -f\Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)$$

と定義すると、$\dfrac{\tilde{\partial} f}{\tilde{\partial} x_k} \in \mathcal{S}'$ である。$\dfrac{\tilde{\partial} f}{\tilde{\partial} x_k}$ を f の超関数の意味での x_k-偏微分と呼ぶ。

$f \in L^1_{PG}$ のときは、f と ϕ_f を同一視することになっていたので、$\dfrac{\tilde{\partial} f}{\tilde{\partial} x_k} = \dfrac{\tilde{\partial} \phi_f}{\tilde{\partial} x_k}$ と約束する。このとき $\dfrac{\tilde{\partial} f}{\tilde{\partial} x_k} \in L^1_{PG}$ とは限らないことに注意。

証明. $f \in \mathcal{S}'$ よりある $c > 0$ とある $N \geq 0$ があって $|f(u)| \leq c|u|_N$. 従って

$$\Big|\frac{\tilde{\partial} f}{\tilde{\partial} x_k}(u)\Big| \leq c\Big|\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big|_N \leq c|u|_{N+1}$$

□

定義 7.2.2. $f \in \mathcal{S}'$, $\alpha \in (\mathbb{N}_*)^n$ に対して

$$\widetilde{D}^\alpha f = \Big(\frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial} x_1}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial} x_n}\Big)^{\alpha_n} f$$

と定義する。

$f \in \mathcal{S}'$, $\alpha \in (\mathbb{N}_*)^n$, $u \in \mathcal{S}$ に対して

$$(\widetilde{D}^\alpha f)(u) = (-1)^{|\alpha|} f(D^\alpha u)$$

が成り立つ。

例 7.2.3. (1) $n = 1$ とする。$a \in \mathbb{R}$ のとき

$$H_a(x) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ 1 & (a \leq x) \end{cases}$$

と定義する。H_a を Heaviside 関数という。$u \in \mathcal{S}$ に対して

$$-\phi_{H_a}(u') = -\int_{\mathbb{R}} H_a(x)u'(x)dx = u(a) = \delta_a(u)$$

従って H_a の超関数の意味の微分は δ_a である。
(2)　$a \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (\mathbb{N}_*)^n$, $u \in \mathcal{S}$ に対して

$$(\widetilde{D}^\alpha \delta_a)(u) = (-1)^{|\alpha|}\delta_a(D^\alpha u) = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha u)(a)$$

定理 7.2.4. $f \in L^1_{PG} \cap C^1$ とする。$\dfrac{\partial f}{\partial x_k} \in L^1_{PG}$ ならば

$$\frac{\tilde{\partial} f}{\tilde{\partial} x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}. \qquad \left(\text{厳密にいえば } \frac{\tilde{\partial}\phi_f}{\tilde{\partial} x_k} = \phi_{\frac{\partial f}{\partial x_k}}\right)$$

$\mathcal{S} \subseteq L^1_{PG}$ かつ $D^\alpha(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ なので定理 7.2.4 から次のことが導かれる。

系 7.2.5. 任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と任意の $\alpha \in (\mathbb{N}_*)^n$ に対して、$\widetilde{D}^\alpha f = D^\alpha f$.

演習 7.2.1. 任意の $f \in C^\infty_{PG}(\mathbb{R}^n)$ と任意の $\alpha \in (\mathbb{N}_*)^n$ に対して、$\widetilde{D}^\alpha f = D^\alpha f$ を示せ。

定理 7.2.4 の証明のために次の定理が必要になる。

定理 7.2.6. $\psi \in C^\infty_{PG}$ は $\psi(0) = 1$ をみたす。このとき $\psi_s(x) = \psi(sx)$ と定義すれば任意の $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と任意の $N \in \mathbb{N}_*$ に対して $\lim_{s\downarrow 0} |u\psi_s - u|_N = 0$.

証明. $\alpha, \beta \in (\mathbb{N}_*)^m$ とする。(6.2.2) より

$$\begin{aligned} &x^\beta(D^\alpha(u\psi_s - u))(x) \\ &\qquad = x^\beta \sum_{0<\gamma\le\alpha} s^{|\gamma|}{}_\alpha C_\gamma (D^{\alpha-\gamma}u)(x)(D^\gamma\psi)(sx) + x^\beta(D^\alpha u)(x)(\psi(sx) - 1) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} f_s(x) &= x^\beta \sum_{0<\gamma\le\alpha} s^{|\gamma|}{}_\alpha C_\gamma (D^{\alpha-\gamma}u)(x)(D^\gamma\psi)(sx) \\ g_s(x) &= x^\beta (D^\alpha u)(x)(\psi(sx) - 1) \end{aligned}$$

とおくとき、$|u\psi_s - u|_{\alpha,\beta} \leq ||f_s||_\infty + ||g_s||_\infty$ である。従って $\lim_{s\downarrow 0} ||f_s||_\infty = \lim_{s\downarrow 0} ||g_s||_\infty = 0$ を示せばよい。

$s \in (0,1)$ とするとき $\psi \in C^\infty_{PG}$ より γ に対して $N(\gamma) \in \mathbb{N}_*$ と c_γ があって、$(D^\gamma\psi)(sx) \leq c_\gamma(1+|sx|^{N(\gamma)}) \leq c_\gamma(1+|x|^{N(\gamma)})$. 従って

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta(D^{\alpha-\gamma}u)(x)(D^\gamma\psi)(sx)| \leq c_\gamma \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta(1+|x|^{N(\gamma)})(D^{\alpha-\gamma}u)(x)| < +\infty$$

上の sup の値を a_γ とおけば $||f_s||_\infty \leq \sum_{0<\gamma\leq\alpha} a_\gamma s^{|\gamma|}$. よって $\lim_{s\downarrow 0} ||f_s||_\infty = 0$.

次に $||g_s||_\infty$ を考える。$\psi \in C^\infty_{PG}$ より、ある $c_1 > 0$, $k \geq 0$ に対して、任意の x で

$$|\psi(x) - 1| \leq c_1(1+|x|)^k$$

である。従って、$0 < s \leq 1$ ならば、

$$|\psi(sx) - 1| \leq c_1(1+|x|)^k. \tag{7.2.1}$$

また $u \in \mathcal{S}$ なのである $c_2 > 0$ があって

$$|x^\beta(D^\alpha u)(x)| \leq \frac{c_2}{(1+|x|)^{k+1}}. \tag{7.2.2}$$

ここで $\delta > 0$ に対して、$A(\delta) = \sup_{|x|\leq\delta} |\psi(x) - 1|$ とおく。このとき $\psi(0) = 1$ より $\lim_{\delta\downarrow 0} A(\delta) = 0$. いま

$$A(\sqrt{s}) = \sup_{|y|\leq\sqrt{s}} |\psi(y) - 1| = \sup_{|x|\leq 1/\sqrt{s}} |\psi(sx) - 1|$$

従って、(7.2.2) より

$$\sup_{|x|\leq 1/\sqrt{s}} |g_s(x)| \leq c_2 A(\sqrt{s})$$

一方 (7.2.1) と (7.2.2) より

$$|g_s(x)| \leq \frac{c_1c_2}{1+|x|}$$

であるから、

$$\sup_{|x|\geq 1/\sqrt{s}} |g_s(x)| \leq c_1c_2\sqrt{s}.$$

以上より $||g_s||_\infty \leq \max\{c_2A(\sqrt{s}), c_1c_2\sqrt{s}\}$. よって $\lim_{s\downarrow 0} ||g_s||_\infty = 0$. □

系 7.2.7. 任意の $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $\{u_m\}_{m\geq 1} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ を「任意の $N \in \mathbb{N}_*$ に対して $\lim_{m\to\infty}|u_m - u|_N = 0$」となるように選ぶことができる。とくに $F, G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ で任意の $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して $F(\varphi) = G(\varphi)$ ならば $F = G$ である。

証明. $\psi \in C_c^\infty$ を $\psi(0) = 1$ を満たすように選ぶ。$m \geq 1$ に対して $u_m(x) = \psi(x/m)u(x)$ とおくと $u_m \in C_c^\infty$ でありまた定理 7.2.6 より任意の $N \in \mathbb{N}_*$ に対して $m \to \infty$ で $|u - u_m|_N \to 0$. □

定理 7.2.4 の証明. 任意の $u \in C_c^\infty$ に対して部分積分により

$$\phi_{\frac{\partial f}{\partial x_k}}(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_k} u dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial u}{\partial x_k} dx = -\phi_f\Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big) = \frac{\tilde{\partial}\phi_f}{\tilde{\partial}x_k}(u)$$

いま $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} \in \mathcal{S}'$ であるから 系 7.2.7 より $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = \dfrac{\tilde{\partial} f}{\tilde{\partial}x_k}$. □

命題 7.2.8. $f \in \mathcal{S}', \varphi \in C_{PG}^\infty$ とする。$u \in \mathcal{S}$ に対して $(f\varphi)(u) = f(\varphi u)$ と定義すると $f\varphi \in \mathcal{S}'$ である。さらに

$$\frac{\tilde{\partial}(f\varphi)}{\tilde{\partial}x_k} = \frac{\tilde{\partial}f}{\tilde{\partial}x_k}\varphi + f\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$$

が成り立つ。$f\varphi$ を *tempered distribution* f と φ の積という。

証明. 任意の $u \in \mathcal{S}$ に対して $|f(u)| \leq c|u|_N$ とする。このとき補題 6.2.8 よりある $M \in \mathbb{N}_*$ と $c' > 0$ があって $|f(\varphi u)| \leq c|\varphi u|_N \leq c'|u|_M$. よって $f\varphi \in \mathcal{S}'$ である。さらに

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\partial}(f\varphi)}{\tilde{\partial}x_k}(u) = -(f\varphi)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big) = -f\Big(\varphi\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big) = -f\Big(\frac{\partial(\varphi u)}{\partial x_k}\Big) + f\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}u\Big) \\ = \Big(\frac{\tilde{\partial}f}{\tilde{\partial}x_k}\varphi\Big)(u) + \Big(f\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\Big)(u)\end{aligned}$$

□

命題 7.2.9. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}^n$ に対して $(\tau_a f)(x) = f(a - x)$ と定義する。$F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して、

$$(F * u)(x) = F(\tau_x u)$$

と定義すると $F*u\in C^\infty_{PG}$ であり、任意の $\alpha\in(\mathbb{N}_*)^n$ に対して

$$D^\alpha(F*u)=F*(D^\alpha u)$$

が成立する。

$F\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $F*u$ を F と u の convolution と呼ぶ。

補題 7.2.10. $v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}), h\in\mathbb{R}$ に対して

$$\Phi^v_h(x)=\frac{v(x+h)-v(x)}{h}-v'(x)$$

とおく。このとき任意の $N\in\mathbb{N}_*$ に対して $\lim_{h\to0}|\Phi^v_h|_N=0$ である。

証明. $k,m\in\mathbb{N}_*$ に対して $h\to0$ で $|\Phi^v_h|_{k,m}=\sup|x^m\frac{d^k}{dx^k}\Phi^v_h(x)|\to0$ を示せばよい。いま $v^{(k)}$ を v の k 階導関数とすれば $\frac{d^k}{dx^k}\Phi^v_h(x)=\Phi^{v^{(k)}}_h$ で $v^{(k)}\in\mathcal{S}$ である。従って任意の $v\in\mathcal{S}$ と任意の $m\in\mathbb{N}_*$ に対して $\lim_{h\to0}\sup|x^m\Phi^v_h(x)|=0$ を示せば十分である。
さて、

$$x^m\Phi^v_h(x)=x^mh\int_0^1\int_0^1 tv''(x+hst)dtds.$$

また $|v''(x)|\le|v|_{m+2}/(1+|x|^m)$ より $|h|\le1$ ならば

$$|x^m\Phi^v_h(x)|\le|h||v|_{m+2}\sup_{(x,a)\in\mathbb{R}\times[-1,1]}\frac{|x|^m}{1+|x+a|^m}.$$

よって $h\to0$ で $\sup|x^m\Phi^v_h(x)|\to0.$ □

命題 *7.2.9* の証明. 簡単のため $n=1$ で示す。ある $N\in\mathbb{N}_*$ とある $c>0$ があって任意の $u\in\mathcal{S}$ に対して $|F(u)|\le c|u|_N$ が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{(F*u)(a+h)-(F*u)(a)}{h}-(F*u')(a)\Big|\\=&\Big|F\Big(\frac{\tau_{a+h}u-\tau_au}{h}-\tau_au'\Big)\Big|=|F(\Phi^{\tau_au}_{-h})|\le c|\Phi^{\tau_au}_{-h}|_N\end{aligned}$$

補題 7.2.10 より $F*u$ は微分可能であり $(F*u)'=F*u'$ となる。帰納的に、$F*u\in C^\infty$ であり $(F*u)^{(n)}=F*u^{(n)}$ がわかる。

次に $F*u \in C^\infty_{PG}$ を示す。いま $k, m \in \mathbb{N}_*$ に対して

$$
\begin{aligned}
|\tau_x u|_{k,m} &= \sup_{y\in\mathbb{R}} |y^m u^{(k)}(x-y)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |x-y|^m |u^{(k)}(y)| \\
&\le \sup_{y\in\mathbb{R}} \sum_{r=0}^m {}_mC_r |x|^{m-r}|y|^r|u^{(k)}(y)| \le \sum_{r=0}^m {}_mC_r|x|^{m-r}|u|_{k,r} \le A(1+|x|^m)
\end{aligned}
$$

（ただし $A>0$ は x によらない定数。）よってある定数 $A_1>0$ があって任意の x に対して $|\tau_x u|_N \le A_1(1+|x|^N)$ である。いま $|F(u)| \le c|u|_N$ より $|(F*u)(x)| = |F(\tau_x u)| \le cA_1(1+|x|^N)$. いま任意の k に対して $d^k(F*u)/dx^k = F*(d^k u/dx^k)$ であるので、u を $d^k u/dx^k$ に置き換えて同じ議論をすれば、任意の k に対してある $c>0$ とある N があって $|d^k(F*u)/dx^k| \le c(1+|x|^N)$. よって $F*u \in C^\infty_{PG}$. □

命題 7.2.11. $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき任意の $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $(F*u)(\varphi) = F((\tau_0 u)*\varphi)$.

補題 7.2.12. $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ とする。いま、

$$
(v*\varphi)_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi\Big(\frac{j}{m}\Big) v\Big(x-\frac{j}{m}\Big)
$$

とおくと任意の $N \in \mathbb{N}_*$ に対して $\lim_{m\to\infty} |v*\varphi - (v*\varphi)_m|_N = 0$.

証明. $\varphi \in C^\infty_c$ なので $(v*\varphi)_m$ の定義の無限和は有限個を除いて 0 であることに注意。従って $(v*\varphi)_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ である。簡単のため $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-1,1]$ とする。このとき $(v*\varphi)_m$ の定義の和は $|j| \le m$ の範囲だけを考えればよい。$k, l \in \mathbb{N}_*$ に対して $m \to \infty$ で $|v*\varphi - (v*\varphi)_m|_{k,l} \to 0$ を示せばよい。いま $\frac{d^k}{dx^k}(v*\varphi - (v*\varphi)_m) = (v^{(k)}*\varphi - (v^{(k)}*\varphi)_m$ より $v^{(k)} = h$ とおけば $|v*\varphi - (v*\varphi)_m|_{k,l} = \sup |x^l((h*\varphi)(x) - (h*\varphi)_m(x))|$. $g_m(x) = x^l((h*\varphi)(x) - (h*\varphi)_m(x))$ とおくと

$$
\begin{aligned}
|g_m(x)| &= \Big| x^l \sum_{j=-m}^m \int_{-j/m}^{(j+1)/m} \Big(\varphi(y)h(x-y) - \varphi\Big(\frac{j}{m}\Big)h\Big(x-\frac{j}{m}\Big)\Big)dy \Big| \\
&\le |x|^l \sum_{j=-m}^m \int_{-j/m}^{(j+1)/m} \frac{1}{m}\sup_{|y|\le 1}\Big|\frac{d}{dy}(\varphi(y)h(x-y))\Big|dy \\
&\le \frac{2}{m}|x|^l(||\varphi'||_\infty \sup_{|y|\le 1}|h(x-y)| + ||\varphi||_\infty \sup_{|y|\le 1}|h'(x-y)|)
\end{aligned}
$$

ここで $h \in \mathcal{S}$ であるから、x によらない定数 C があって、$|h(x)| \leq C(1+|x|^l)^{-1}$ かつ $|h'(x)| \leq C(1+|x|^l)^{-1}$. 従って

$$||g_m||_\infty \leq \frac{2(||\varphi||_\infty + ||\varphi'||_\infty)}{m} \sup_{x\in\mathbb{R},|y|\leq 1} \frac{|x|^l}{1+|x-y|^l}.$$

これより $\lim_{m\to\infty} ||g_m||_\infty = \lim_{m\to\infty} |v*\varphi - (v*\varphi)_m|_{k,l} = 0$. □

補題 7.2.13. $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $G(\varphi) = F(h*\varphi)$ と定義すれば $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

証明. $\alpha, \beta \in (\mathbb{N}_*)^n$ とするとき $x^\beta D^\alpha(h*\varphi) = x^\beta(D^\alpha * \varphi)$. $D^\alpha h = g$ とおけば $|h*\varphi|_{\alpha,\beta} = ||x^\beta(g*\varphi)||_\infty$. ここで $\mathcal{F}g = \widehat{g}, \mathcal{F}\varphi = \widehat{\varphi}$ とおけば、補題 6.3.2-(1), 6.4.1-(1) および 6.2.6 より

$$\begin{aligned}
||x^\beta(g*\varphi)||_\infty &\leq ||D^\beta(\widehat{g}\widehat{\varphi})||_1 \leq \sum_{0\leq\gamma\leq\beta} {}_\beta C_\gamma ||D^{\beta-\gamma}\widehat{g} D^\gamma \widehat{\varphi}||_1 \\
&\leq \sum_{0\leq\gamma\leq\beta} {}_\beta C_\gamma ||D^{\beta-\gamma}\widehat{g}||_1 ||D^\gamma\widehat{\varphi}||_\infty \leq \sum_{0\leq\gamma\leq\beta} {}_\beta C_\gamma ||D^{\beta-\gamma}\widehat{g}||_1 ||x^\gamma\varphi||_1 \\
&\leq \sum_{0\leq\gamma\leq\beta} {}_\beta C_\gamma ||D^{\beta-\gamma}\widehat{g}||_1 |x^\gamma\varphi|_{n+1} \leq c_{\alpha,\beta}|\varphi|_{n+|\beta|+1}
\end{aligned}$$

（ただし $c_{\alpha,\beta}$ は h, α, β によって決まる定数） 従って N と h のみで決まる定数 c_N があって任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対して $|h*\varphi|_N \leq c_N|\varphi|_{n+N+1}$. 一方 $F \in \mathcal{S}'$ よりある N と c があって任意の $u \in \mathcal{S}$ に対して $|F(u)| \leq c|u|_N$. これより $|G(\varphi)| = |F(h*\varphi)| \leq c|h*\varphi|_N \leq cc_N|\varphi|_{n+N+1}$. よって $G \in \mathcal{S}'$ □

命題 *7.2.11* の証明. 簡単のため $n=1$ で示す。いま $F \in \mathcal{S}'$ より $c>0, N \in \mathbb{N}_*$ があって任意の $v \in \mathcal{S}$ に対して $|F(v)| \leq c|v|_N$ である。$\varphi \in C_c^\infty$ のとき

$$\frac{1}{m}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi\Big(\frac{j}{m}\Big)(F*u)\Big(\frac{j}{m}\Big) = F\Big(\frac{1}{m}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\varphi\Big(\frac{j}{m}\Big)\tau_{j/m}u\Big) = F(((\tau_0 u)*\varphi)_m) \tag{7.2.3}$$

補題 7.2.12 より $\lim_{m\to\infty} |((\tau_0 u)*\varphi)_m - (\tau_0 u)*\varphi|_N = 0$ である。よって $m\to\infty$ で $F(((\tau_0 u)*\varphi)_m) \to F((\tau_0 u)*\varphi)$. 一方 $m\to\infty$ で (7.2.3) の最初の項は $(F*u)(\varphi)$ に収束する。従って $(F*u)(\varphi) = F((\tau_0 u)*\varphi)$ が $\varphi \in C_c^\infty$ について成立する。補題 7.2.13 より $G(\varphi) = F(\tau_0 u*\varphi)$ とすれば $G \in \mathcal{S}'$. 任意の $\varphi \in C_c^\infty$ に対して $G(\varphi) = (F*u)(\varphi)$ であるので系 7.2.7 を用いれば一般の $\varphi \in \mathcal{S}$ についても $(F*u)(\varphi) = G(\varphi) = F((\tau_0 u)*\varphi)$ がわかる。 □

演習 7.2.2. $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ とする。f の超関数の意味での微分が 0 のとき f は定数関数に等しいことを示せ。

演習 7.2.3. $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ とする。いま $xf = 0$ ならば f は δ_0 の定数倍であることを示せ。

演習 7.2.4. $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}$ とする。
(1) f の超関数の意味での k-階微分が 0 ならば f は $k-1$ 次以下の多項式であることを示せ。
(2) $x^k f = 0$ ならばある定数 $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ に対して $f = \sum_{j=0}^{k-1} c_j \delta_0^{(j)}$ と書けることを示せ。ただし $\delta_0^{(j)}$ は δ_0 の超関数の意味の j-階微分である。

演習 7.2.5. (1) $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ は $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1$ を満たすとする。このとき任意の $u \in C_c(\mathbb{R})$ に対してある $\psi \in C_c(\mathbb{R})$ があって

$$u = \frac{d\psi}{dx} + \Big(\int_{\mathbb{R}} u(x)dx\Big)\varphi$$

と書けることを示せ。
(2) $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ で f の超関数の意味の微分が 0 であるとする。このとき、ある定数 c があって任意の $u \in C_c(\mathbb{R})$ に対して $f(u) = c\int_{\mathbb{R}} u(x)dx$ となることを示せ。
(3) $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ で f の超関数の意味の微分が 0 であるとする。このとき f は定数関数であることを示せ。

演習 7.2.6. (1) $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ を $\varphi(0) = 1$ となるものとする。このとき任意の $u \in C_c(\mathbb{R})$ に対してある $\psi \in C_c(\mathbb{R})$ があって $u(x) = x\psi(x) + u(0)\varphi(x)$ と書けることを示せ。
(2) $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ は $xf = 0$ をみたすとする。このときある定数 c があって任意の $u \in C_c(\mathbb{R})$ に対して $f(u) = cu(0)$ をみたすことを示せ。
(3) $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ とする。いま $xf = 0$ ならば f は δ_0 の定数倍であることを示せ。

§7.3 超関数の Fourier 変換

命題 7.3.1. $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする。$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $\widehat{F}(u) = F(\mathcal{F}u), \widetilde{F}(u) = F(\mathcal{F}^{-1}u)$ と定義すると $\widehat{F}, \widetilde{F} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ である。とくに $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ のときは $\widehat{f} = \mathcal{F}f, \widetilde{f} = \mathcal{F}^{-1}f$ である。

証明. $c>0, N\in\mathbb{N}_*$ があって任意の $u\in\mathcal{S}$ に対して $|F(u)|\le c|u|_N$ とする。$\alpha,\beta\in(\mathbb{N}_*)^n$ に対して補題 6.2.6 より

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{F}u|_{\alpha,\beta} &= ||x^\beta D^\alpha \mathcal{F}u||_\infty = ||\mathcal{F}(D^\beta(x^\alpha u))||_\infty \\
&\le (2\pi)^{-n/2}||D^\alpha(x^\beta u)||_1 \\
&\le (2\pi)^{-n/2}\sum_{0\le\gamma\le\alpha} {}_\alpha C_\gamma ||D^{\alpha-\gamma}(x^\beta)D^\gamma u||_1 \\
&\le (2\pi)^{-n/2}\sum_{0\le\gamma\le\alpha} a_{\alpha,\gamma}|D^{\alpha-\gamma}(x^\beta)D^\gamma u|_{n+1} \\
&\le c_{\alpha,\beta}|u|_{n+\max\{|\alpha|,|\beta|\}+1}
\end{aligned}
$$

(ただし $c_{\alpha,\beta}$ は u によらない定数。) 従ってある $c_N>0$ があって任意の $u\in\mathcal{S}$ に対して $|\mathcal{F}u|_N\le c_N|u|_{n+N+1}$. よって $|\widehat{F}(u)|=|F(\mathcal{F}u)|\le c|\mathcal{F}u|_N\le cc_N|u|_{n+N+1}$. つまり $\widehat{F}\in\mathcal{S}'$.

次に $f\in L^1, u\in\mathcal{S}$ とする。$f(x)u(y)e^{-ixy}$ は $dxdy$-可積分なので Fubini の定理より

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(u) = f(\mathcal{F}u) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int f(x)\Big(\int u(y)e^{-ixy}dy\Big)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int u(y)\Big(\int f(x)e^{-ixy}dx\Big)dx = (\mathcal{F}f)(u)
\end{aligned}
$$

従って $\widehat{f}=\mathcal{F}f$. $\widetilde{F}$ についても同様 □

定義 7.3.2. $\mathcal{F},\mathcal{F}^{-1}:\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ を $F\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ にたいして $\mathcal{F}F=\widehat{F}, \mathcal{F}^{-1}F=\widetilde{F}$ と定義する。$\mathcal{F}$ を（超関数の）Fourier 変換、$\mathcal{F}^{-1}$ を（超関数の）Fourier 逆変換と呼ぶ。

命題 7.3.1 より超関数の Fourier 変換、Fourier 逆変換はそれぞれ L^1 の Fourier 変換、Fourier 逆変換の自然な拡張となっていることがわかる。

命題 7.3.3. $\mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{F}=\mathcal{F}\circ\mathcal{F}^{-1}=\mathrm{I}_{\mathcal{S}'}$.

証明. $F\in\mathcal{S}', u\in\mathcal{S}$ に対して $(\mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{F})(F)(u)=(\mathcal{F}F)(\mathcal{F}^{-1}u)=F(\mathcal{F}\circ\mathcal{F}^{-1}u)=F(u)$. □

例 7.3.4. $s\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}^n$ に対して、$g_s(x)=e^{-is|x|^2}$ とおくと、$g_s\in L^\infty\subseteq\mathcal{S}'$ である。$\mathcal{F}g_s$ を求める。$z\in\mathbb{C}, x\in\mathbb{R}^n$ に対して $f_z(x)=e^{-z|x|^2}$ と定義する。$H_R=\{z|z\in\mathbb{R},\Re z>0\}$ とおくと $z\in H_R$ では $f_z\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ である。

Fact 1:$F(z,x)=(\mathcal{F}f_z)(x)$ とおくとき、$x\in\mathbb{R}^n$ を固定するごとに $F(z,x)$ は $z\in H_R$ 上で正則である。
証明：
$$\frac{e^{-(z+w)|y|^2}-e^{-z|y|^2}}{w}=-\int_0^1|y|^2e^{-(z+tw)|y|^2}dt$$
いま $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R},a>0)$ とすると、$|w|\le a/2$ ならば
$$|e^{-(z+tw)|y|^2}|\le e^{-a|y|^2/2}$$
となる。従って Fubini の定理より、
$$\lim_{w\to 0}\frac{F(z+w,x)-F(z,x)}{w}=-\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}|y|^2e^{-z|y|^2}e^{-ixy}dy$$
Fact 2: $z=re^{i\theta}(r>0,-\pi<\theta<\pi)$ に対して、$\sqrt{z}=r^{1/2}e^{i\theta/2}$ と定義する。$z\in H_R,x\in\mathbb{R}^n$ に対して、$F(z,x)=\frac{1}{(\sqrt{2z})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4z}}$ である。
証明:$G(z,x)=\frac{1}{(\sqrt{2z})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4z}}$ とおくとき x を固定するごとに $G(z,x)$ は $z\in H_R$ で正則である。いま、$z\in\mathbb{R}$ では、例 6.3.1 より $F(z,x)=G(z,x)$ よって一致の定理より任意の $z\in H_R$ で $F(z,x)=G(z,x)$.

いま $u\in\mathcal{S}$ に対して、$\widehat{u}=\mathcal{F}u$ とするとき $\int f_z(x)\widehat{u}(x)dx=\int F(z,x)u(x)dx$ である。すなわち、
$$\int e^{-z|x|^2}\widehat{u}(x)dx=\int\frac{1}{(\sqrt{2z})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4z}}u(x)dx \tag{7.3.1}$$
である。(7.3.1) の両辺の被積分関数は、$z=si$ $(s\in\mathbb{R},s\neq 0)$ でも可積分である。よって (7.3.1) の右辺を $U(z)$, 左辺を $V(z)$ とおくと U,V は $H'=\{z|z\in\mathbb{C},\Re z\ge 0,z\neq 0\}$ 上で定義される。さらに Fubini の定理より U,V は H' 上で一致する。従って、$z\in H'$ に対して、
$$(\mathcal{F}f_z)(x)=\frac{1}{(\sqrt{2z})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4z}}$$
である。とくに、$z=si$ $(s\in\mathbb{R},s\neq 0)$ とすれば、
$$(\mathcal{F}g_s)(x)=\frac{1}{(2|s|)^{n/2}}e^{-\frac{in\pi}{4}\frac{s}{|s|}}e^{-\frac{|x|^2}{4s}i}$$

命題 7.3.5. (1) $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \alpha \in (\mathbb{N}_*)^n$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\widetilde{D}^\alpha F) &= i^{|\alpha|} x^\alpha \mathcal{F} F \\ \mathcal{F}^{-1}(\widetilde{D}^\alpha F) &= (-i)^{|\alpha|} x^\alpha \mathcal{F}^{-1} F \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x^\alpha F) &= i^{|\alpha|} \widetilde{D}^\alpha \mathcal{F} F \\ \mathcal{F}^{-1}(x^\alpha F) &= (-i)^{|\alpha|} \widetilde{D}^\alpha \mathcal{F}^{-1} F \end{aligned} \tag{7.3.3}$$

(2) $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とするとき、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(F * u) &= (2\pi)^{n/2} \mathcal{F} F \cdot \mathcal{F} u \\ \mathcal{F}^{-1}(F * u) &= (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}^{-1} F \cdot \mathcal{F}^{-1} u \end{aligned} \tag{7.3.4}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(F \cdot u) &= (2\pi)^{-n/2} (\mathcal{F} F) * (\mathcal{F} u) \\ \mathcal{F}^{-1}(F \cdot u) &= (2\pi)^{-n/2} (\mathcal{F}^{-1} F) * (\mathcal{F}^{-1} u) \end{aligned} \tag{7.3.5}$$

証明. (1) $u \in \mathcal{S}$ に対して

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(\widetilde{D}^\alpha F))(u) &= (\widetilde{D}^\alpha F)(\mathcal{F} u) = (-1)^{|\alpha|} F(D^\alpha(\mathcal{F} u)) \\ &= (-1)^{|\alpha|} F((-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha u)) = i^{|\alpha|} (\mathcal{F} F)(x^\alpha u) = i^{|\alpha|} (x^\alpha \mathcal{F} F)(u) \end{aligned}$$

他も同様。

(2) $\varphi \in \mathcal{S}$ に対して命題 7.2.11 より

$$(\mathcal{F}(F * u))(\varphi) = (F * u)(\mathcal{F}\varphi) = F((\tau_0 u) * \mathcal{F}\varphi)$$

ここで $(\tau_0 u) * \mathcal{F}\varphi = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\tau_0 u) \cdot \varphi) = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}(\mathcal{F} u \cdot \varphi)$. よって

$$(\mathcal{F}(F * u))(\varphi) = (2\pi)^{n/2} (\mathcal{F} F)(\mathcal{F} u \cdot \varphi) = (2\pi)^{n/2} (\mathcal{F} F \cdot \mathcal{F} u)(\varphi).$$

他も同様。 □

命題 7.3.6. μ を $\mathbb{R}^n$ 上の *Borel* 正則な測度で $\mu(\mathbb{R}^n) < +\infty$ となるものとする。このとき、

$$(\mathcal{F}\mu)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} d\mu(y)$$

である。

証明. $u \in \mathcal{S}$ とする。このとき、Fubini の定理より

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\mu)(u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F} u)(y) d\mu(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-iyx} dx \Big) d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \Big(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iyx} d\mu(y) \Big) dy \end{aligned}$$

□

§7.4　微分方程式への応用

波動方程式

$u:[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ 上で C^∞ 級であり次の方程式をみたすとする。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u \tag{7.4.6}$$

ただし $\Delta=\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2}$ である。さらに $t=0$ で次の初期条件をみたすとする。

$$u(0,x)=f(x),\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=g(x)$$

いま $f,g\in\mathcal{S}$ とし $t>0$ で $u(t,\cdot)\in\mathcal{S}$ と仮定する。u を x に関して Fourier 変換したものを $U(t,x)$, $\widehat{f}=\mathcal{F}f,\widehat{g}=\mathcal{F}g$ とおくと §6.6 と同様の考察で

$$\begin{aligned}U(t,x)&=\widehat{f}(x)\cos|x|t+\widehat{g}(x)\frac{\sin|x|t}{|x|}\\&=\frac{\partial}{\partial t}\Big(\widehat{f}(x)\frac{\sin|x|t}{|x|}\Big)+\widehat{g}(x)\frac{\sin|x|t}{|x|}\end{aligned}$$

（$\mathcal{F}$ と $\partial^2/\partial t^2$ が交換可能であることを仮定する。）いま $\cos|x|t,\sin|x|t/|x|\in C^\infty_{PG}\subseteq\mathcal{S}'$ である。従って $c_t(x)=\cos|x|t,s_t(x)=\sin|x|t/|x|$ とおくと、

$$\begin{aligned}u(t,x)&=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}((\mathcal{F}^{-1}c_t)*f)(x)+\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}((\mathcal{F}^{-1}s_t)*g)(x)\\&=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{\partial}{\partial t}((\mathcal{F}^{-1}s_t)*f)(x)+\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}((\mathcal{F}^{-1}s_t)*g)(x)\end{aligned}$$

となる。以後 $n=3$ で考える。$r>0,f\in\mathcal{S}$ に対して $M_r(f)$ を f の原点を中心とした半径 r の球面 $S_r=\{x|x\in\mathbb{R}^n,|x|=r\}$ 上での平均とする。すなわち、

$$M_r(f)=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{S_r}fdS$$

（dS は面積分）この積分は S_r 上の一様分布をあらわす確率測度に関する積分であるから、$M_r\in\mathcal{S}$ である。極座標 $x_1=r\cos\theta_1\cos\theta_2,x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2,z=r\sin\theta_2$　$(r\geq 0,\theta_1\in[0,2\pi),\theta_2\in[-\pi/2,\pi/2])$ を用いて表せば、

$$M_r(f)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f(r\cos\theta_1\cos\theta_2,r\sin\theta_1\cos\theta_2,r\sin\theta_2)\cos\theta_2d\theta_1d\theta_2$$

となる。ここで命題 7.3.6 より

$$(\mathcal{F}M_r)(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}4\pi r^2}\int_{S_r}e^{-ixy}dS_y$$

であるが、この積分は回転に関して不変なので、x での値と $(0,0,|x|)$ での値が等しい。従って、

$$(\mathcal{F}M_r)(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-i|x|r\sin\theta_2}\cos\theta_2 d\theta_1 d\theta_2=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\sin|x|r}{|x|r}$$

これより $(2\pi)^{-3/2}\mathcal{F}^{-1}s_t=tM_t$ である。よって $S_r(x)=\{y||y-x|=r\}$ とおくとき波動方程式の解 $u(t,x)$ は

$$\begin{aligned}u(t,x)&=\frac{\partial}{\partial t}\bigl(t(M_t*f)(x)\bigr)+t(M_t*g)(x)\\&=\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(\frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)}f(y)dS_y\Bigr)+\frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)}g(y)dS_y\end{aligned}$$

Schrödinger 方程式

$u(t,x)$ は $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上定義された複素数値関数で、$u\in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ であり、任意の t に対して $u(t,x)$ は $x\in\mathbb{R}^n$ の関数として $u(t,\cdot)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とする。さらに u は次の（自由場のもとでの）Schrödinger 方程式をみたすとする。

$$\frac{\partial u}{\partial t}=ik\Delta u \tag{7.4.7}$$

（k は粒子の質量および Plank 定数からきまる定数。）さらに $t=0$ で $\varphi(x)=u(0,x)$ とおき $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と仮定する。ここで (7.4.7) を $x\in\mathbb{R}^n$ に関して Fourier 変換する。いま Fourier 変換と $\partial/\partial t$ が交換可能とすると

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,x)=-ik|x|^2U(t,x)$$

ただし $U(t,x)=(\mathcal{F}u(t,\cdot))(x)$ である。x を固定するごとに常備分方程式を解けば、

$$U(t,x)=e^{-ikt|x|^2}\widehat{\varphi}(x)$$

ただし $\widehat{\varphi}=\mathcal{F}\varphi$. $e^{-ikt|x|^2}$ の Fourier（逆）変換は例 7.3.2 で求めたので、

$$u(t,x)=\frac{1}{(4\pi k|t|)^{n/2}}e^{-\frac{in\pi}{4}\frac{t}{|t|}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\frac{|x-y|^2}{4kt}}\varphi(y)dy$$

となる。$u(t,x)$ は量子力学では時刻 t における波動関数と呼ばれる。$A \subseteq \mathbb{R}^n$ に粒子がいる確率は
$$\frac{\int_A |u(t,x)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx}$$
で与えられる。また運動量ベクトルが $B \subseteq \mathbb{R}^n$ にある確率は
$$\frac{\int_B |U(t,x)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^n} |U(t,x)|^2 dx}$$
で与えられる。ここで $|U(t,x)| = |e^{-ikt|x|^2}\widehat{\varphi}(x)| = |\widehat{\varphi}(x)|$ であるから、
$$\frac{\int_B |U(t,x)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^n} |U(t,x)|^2 dx} = \frac{\int_B |\widehat{\varphi}(x)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}(x)|^2 dx}$$
となり時間 t に依存しない。これは量子力学における “運動量の保存則” である。