解析学 2 演習 1　　　　　担当　木上

演習 1.1. 次の積分の $n \to \infty$ の極限を求めよ。

$$(1)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}dx \quad (2)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin e^x}{1+nx^2}dx \quad (3)\ \int_0^1 \frac{n\cos x}{1+n^2x^{3/2}}dx$$

演習 1.2. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を σ-有限な測度空間とする。$n \geq 1$ に対して、$f_n : X \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{M}$-可測かつ μ-可積分とする。

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_X |f_n(x)|dx < +\infty$$

が成り立つとき、μ-a.e. $x \in X$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ が成り立つことを示せ。

演習 1.3. $f_n(x)$ を $[0,1]$ 上で C^1 級の関数とする。このとき、

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| < +\infty \quad \text{かつ} \quad \sum_{n\geq 1} |a_n| \max_{x\in[0,1]} |(f_n)'(x)| < +\infty$$

ならば、$\sum_{n\geq 1} a_n f_n(x)$ は $[0,1]$ 上 C^1 級であることを示せ。

演習 1.4. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$ とする。このとき

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\pi x \tag{1}$$

とすれば f は $[0,1]$ 上連続であることを示せ。さらに、

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2\pi^2 t} \sin k\pi x \tag{2}$$

とおけば、$u(x,t)$ が次の方程式の解であることを示せ。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} & = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) & = f(x), u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$